

# Generatywna AI jako **współautor** materiałów dydaktycznych

Interaktywne wizualizacje matematyczne dla uczelni technicznych



**Dorota Krawczyk-Stańdo**  
Politechnika Łódzka



**Adrian Stańdo**  
Capgemini Invent · PJATK

CZĘŚĆ I · Perspektywa dydaktyczna

# Matematyka, której nie widać

● Prowadzi: **Dorota Krawczyk-Stańdo** · Politechnika Łódzka

# Studenci i AI — jak to wygląda naprawdę?



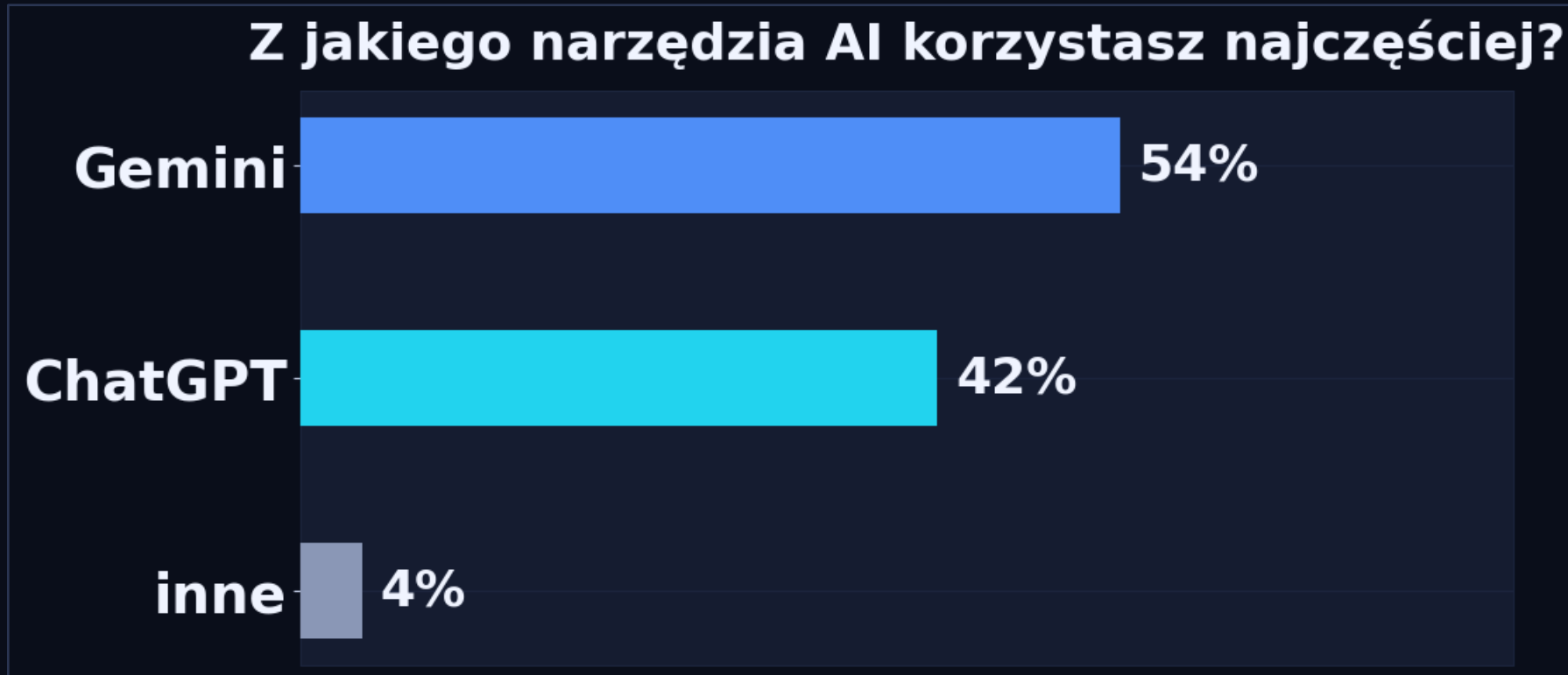
96%

korzysta z AI  
w życiu codziennym

100%

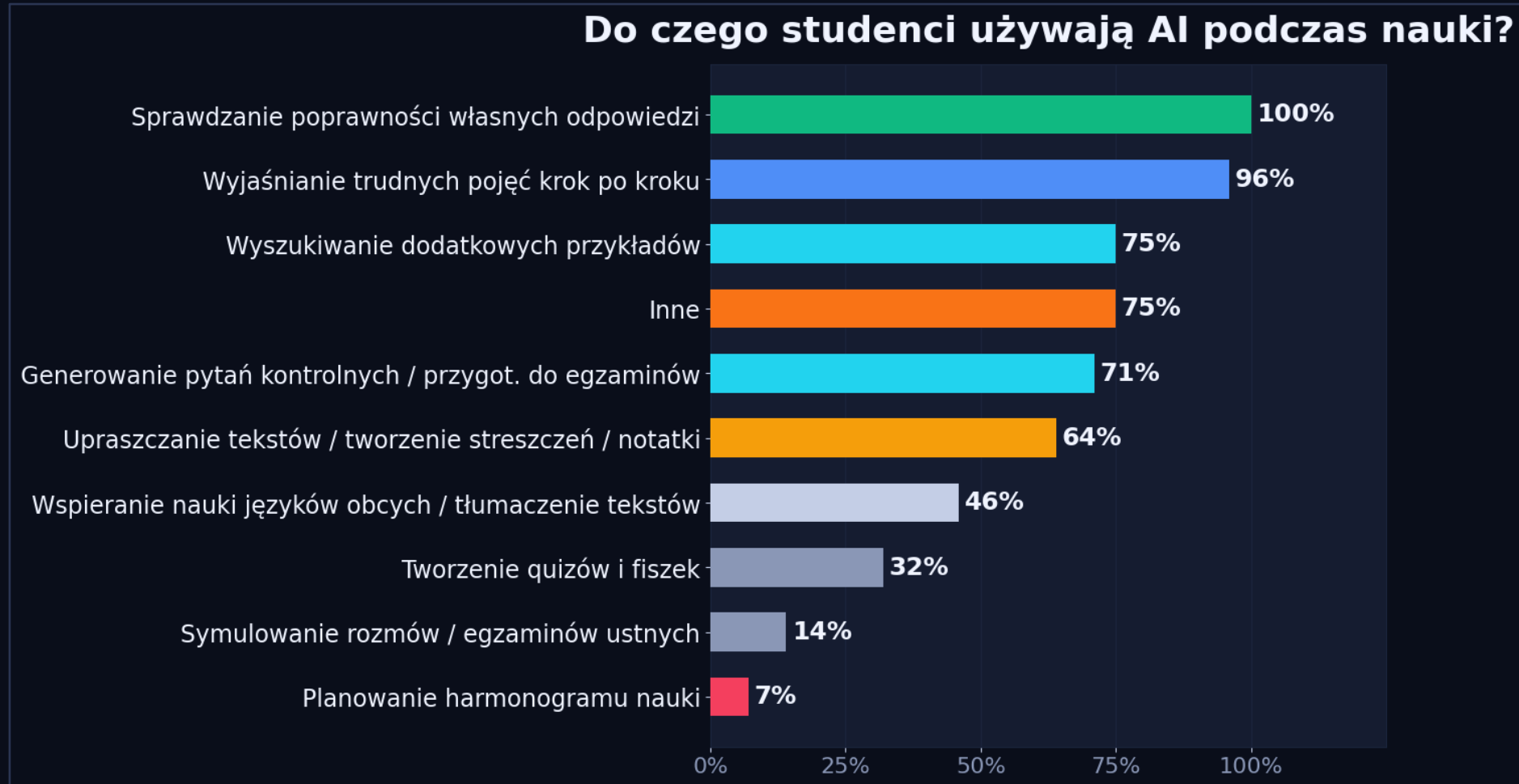
używa AI  
w celach edukacyjnych

# Gemini wyprzedza ChatGPT — dlaczego?

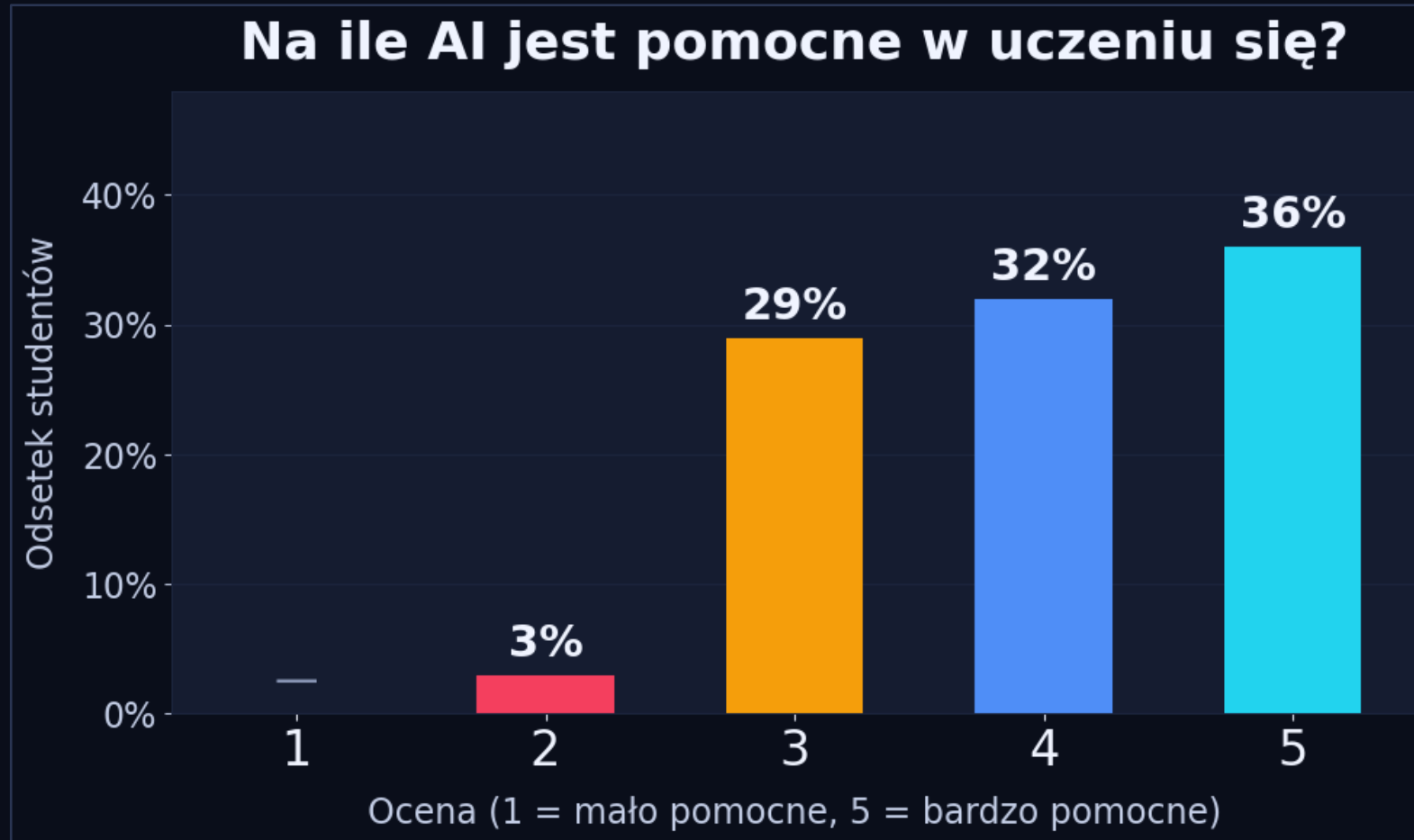


**Google AI Pro** — za darmo na rok dla studentów uczelni wyższych, aktywny w Polsce od 2025 r.

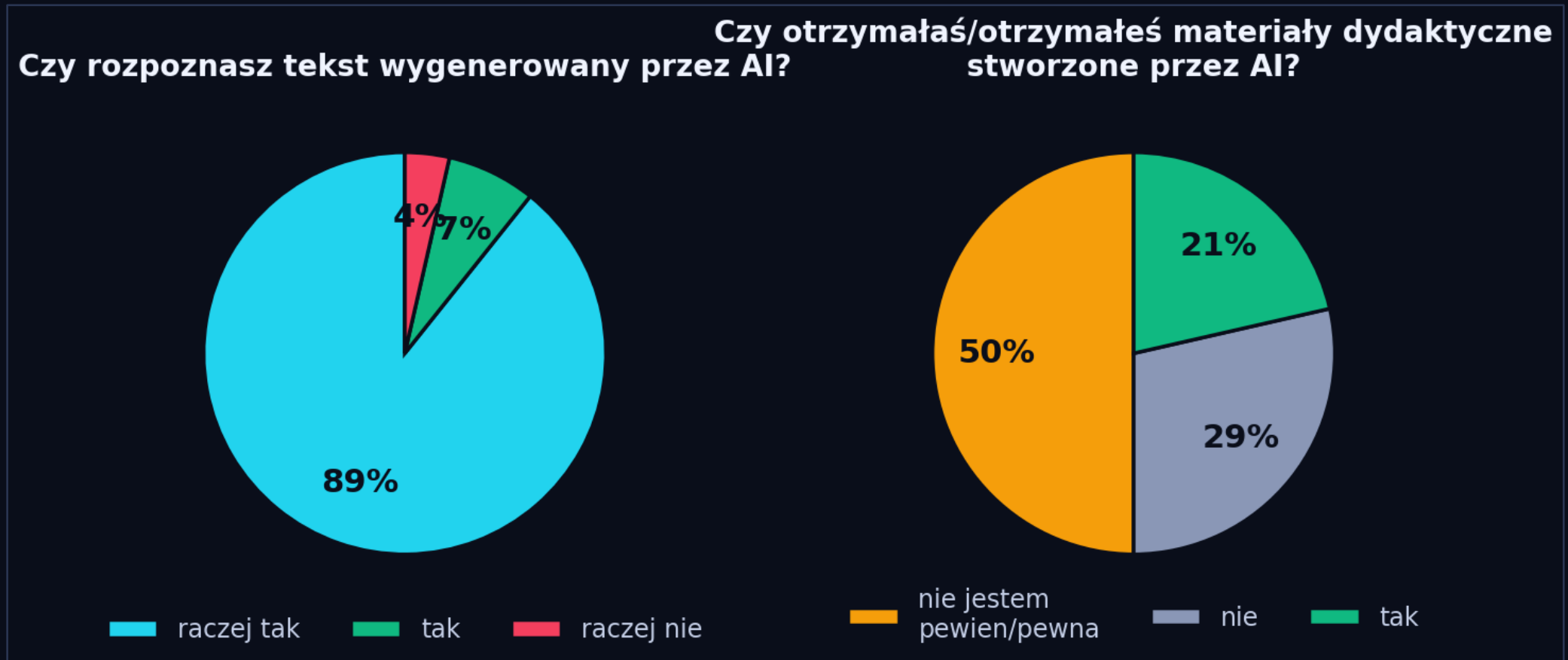
# Do czego studenci **naprawdę** używają AI?



# Jak pomocne jest AI w uczeniu się?



# 96% rozpozna tekst AI — ale czy wiedzą, co dostają?



Studenci ufają własnej intuicji w wykrywaniu AI — mimo że połowa nie wie, czy materiały dydaktyczne są przy jej pomocy wygenerowane.

# Gdzie studenci tracą intuicję?

**Matematykę na politechnice wykłada się symbolicznie.**

Student opanowuje wzory, podstawia dane i otrzymuje wynik.

**Ale za symbolami znika obraz.** Czym geometrycznie jest element pola? Jak wygląda granica sumy na zakrzywionej powierzchni?

**To luka między „umiem policzyć” a „rozumiem, co liczę”.**

Właśnie ona decyduje o tym, czy wiedza zostaje.

*„Można nauczyć się czytać nuty —  
nie słysząc przy tym muzyki.”*

CO WIDZI STUDENT

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

**„Liczę — ale co?”**

wzór bez obrazu = wynik bez zrozumienia

# Dać matematykę do dotknięcia

**Interaktywna aplikacja w przeglądarce.** Bez instalacji, wystarczy link. Każdy moduł to jedno pojęcie.

**Student sam zmienia parametry** suwakami i natychmiast widzi skutek na wykresie 2D i 3D.

7

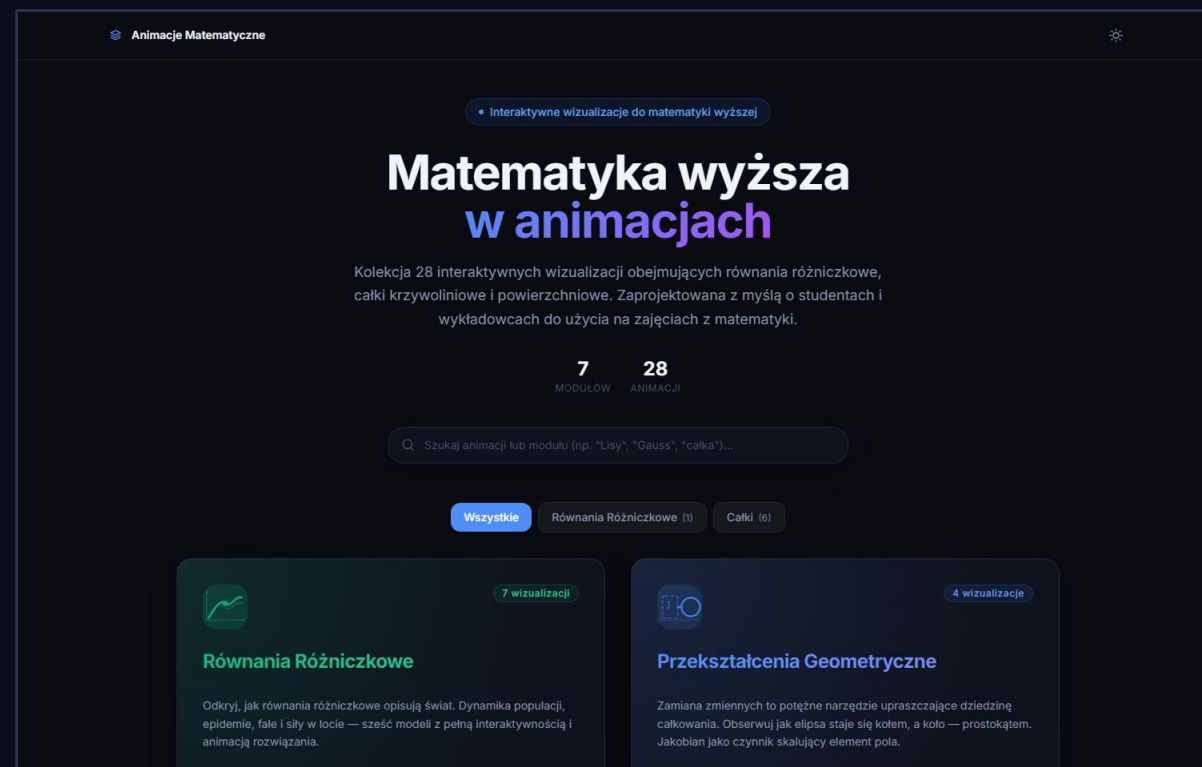
modułów

28

animacji

0

instalacji



# Zobaczmy to na żywo

Otwórzmy aplikację w przeglądarce i przejdźmy przez przykłady.

- ▶ **Współrzędne biegunowe** — przekształcenie koła w prostokąt
- ▶ **Lisy i króliki** — równania różniczkowe, które "żyją"
- ▶ **Model SIR (pandemia)** — ewolucja rozprzestrzeniania się wirusa
- ▶ **Sumy Riemanna** — granica staje się: polem pod krzywą, objętością pod powierzchnią
- ▶ **Całka krzywoliniowa** — "płot" nad krzywą — geometria w 3D

# Koło, które przekształca się w prostokąt



● Lewa: koło (x, y)

Naturalna dziedzina całkowania —  
niewygodna do liczenia.

● Prawa: prostokąt (r, φ)

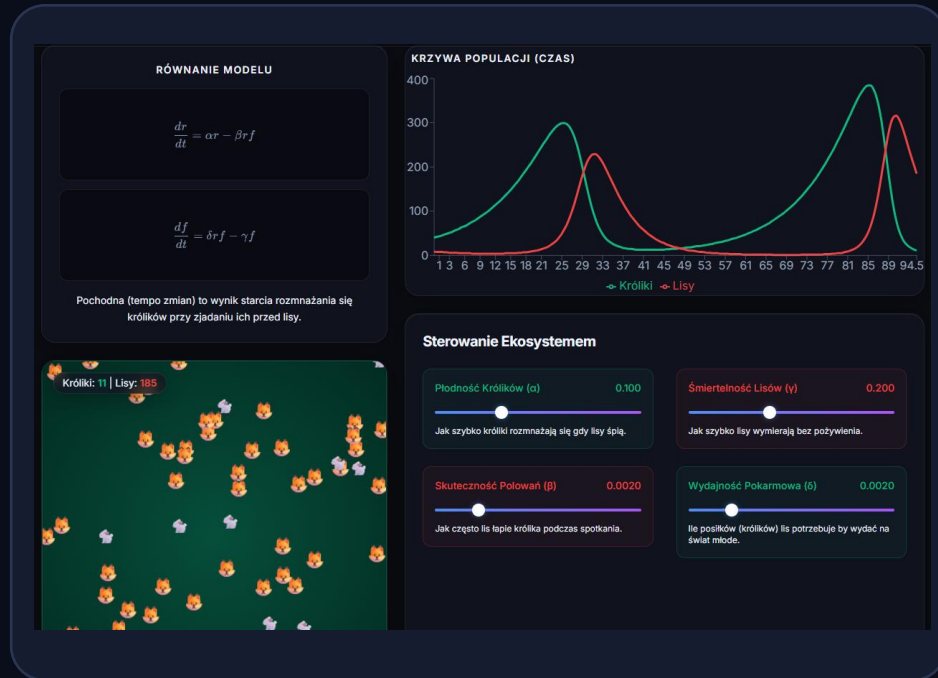
Te same punkty we współrzędnych  
biegunowych.

● Jakobian  $J = r$

Mierzy, ile razy mapa "rozciąga" element  
pola.

# Lisy i króliki — równania, które żyją

Drapieżnik i ofiara regulują swoją liczebność nawzajem. Dwa proste równania — a na ekranie widać tętniący ekosystem.



$$dr/dt = ar - \beta rf$$

$$df/dt = \delta rf - \gamma f$$

**Więcej królików** → rosną lisy → spada liczba królików → głodują lisy. Cykl się zamyka.

**Suwaki zmieniają reguły gry.** Student eksperymentuje i sam odkrywa rytm oscylacji.

# Model SIR — pandemia jako układ ODE



**S — podatni, I — chorzy, R — ozdrowiały.** Trzy liczby opisują epidemię. Model jest deterministyczny, ale wrażliwy na parametry.

**$\beta$  (zaraźliwość) i  $\gamma$  (powrót do zdrowia)** decydują, czy epidemia wybucha czy gaśnie. Student zmienia suwaki i widzi próg.

**Te same równania** — inne dane. Tak modeluje się gripę, COVID, odrę. Matematyka = jedno narzędzie.

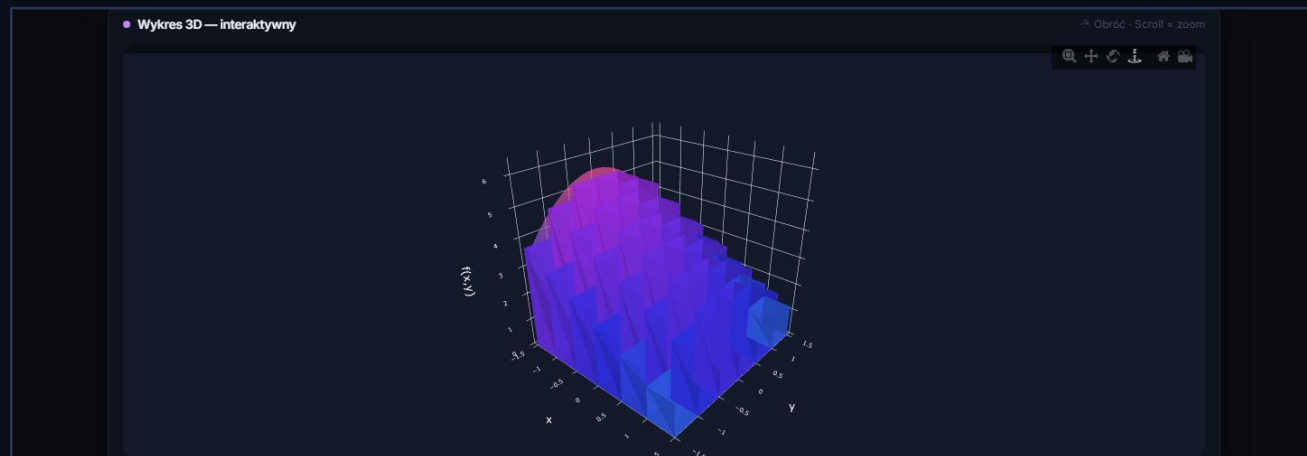
# Granica, którą widać



**Pole dzielimy na prostokąty.** Im więcej podziałów  $N$ , tym wierniej suma przybliży pole pod krzywą.

**$N = 9 \rightarrow$  błąd  $\sim 8\%$ .  $N = 20 \rightarrow \sim 1\%$ .**  
Granica przestaje być abstrakcyjnym symbolem.

**To samo w 3D.** Słupki wypełniają bryłę pod powierzchnią — całka podwójna staje się obrazem.



# Całka pojedyncza — pole pod krzywą

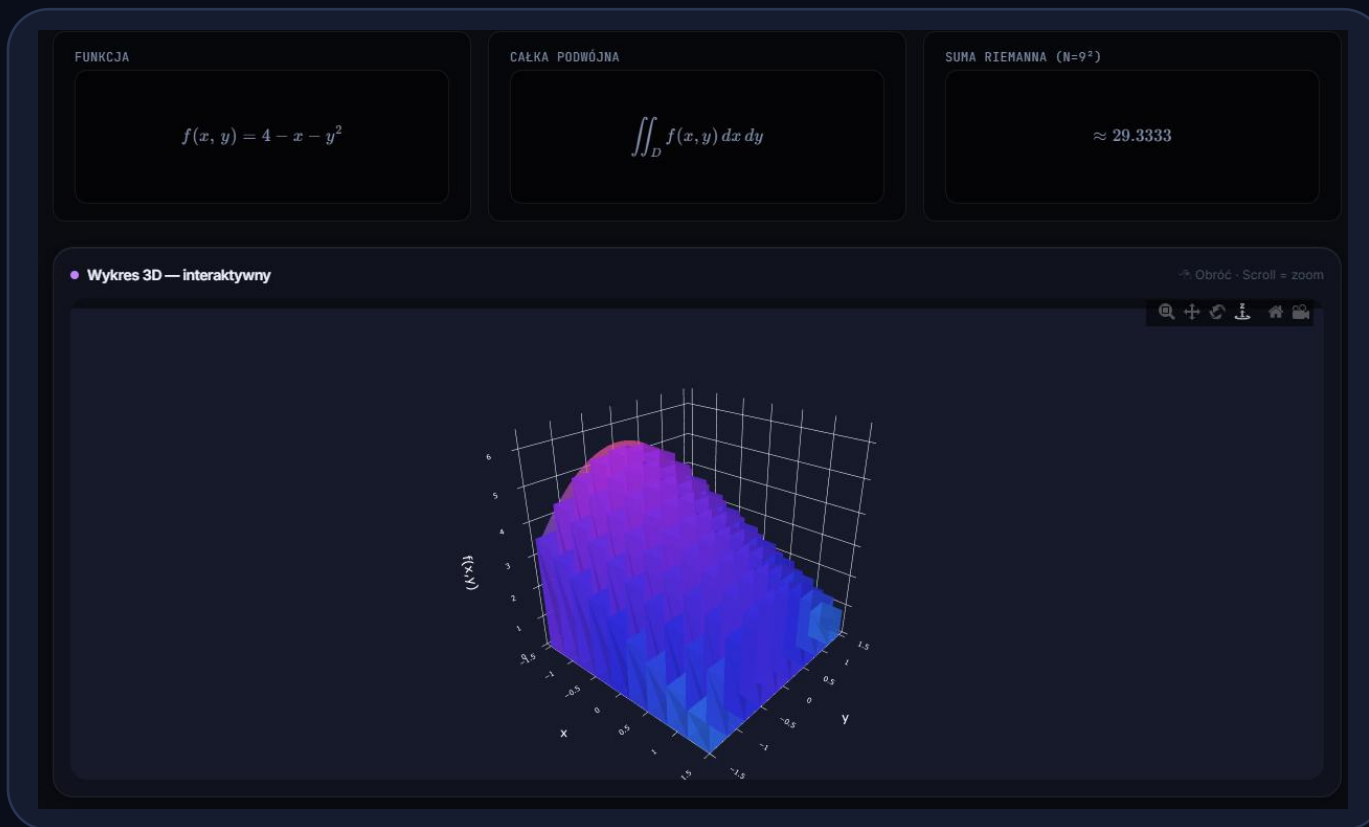


**Suma Riemanna:** prostokąty pod wykresem funkcji. Szerokość  $\rightarrow 0$ , liczba  $\rightarrow \infty$ .

**Granica tej sumy** to właśnie całka oznaczona. Student widzi, jak przybliżenie staje się dokładne.

**Suwak N:** od 4 prostokątów do 200 — błąd spada na oczach. Definicja nabiera sensu.

# Całka podwójna — bryła pod powierzchnią

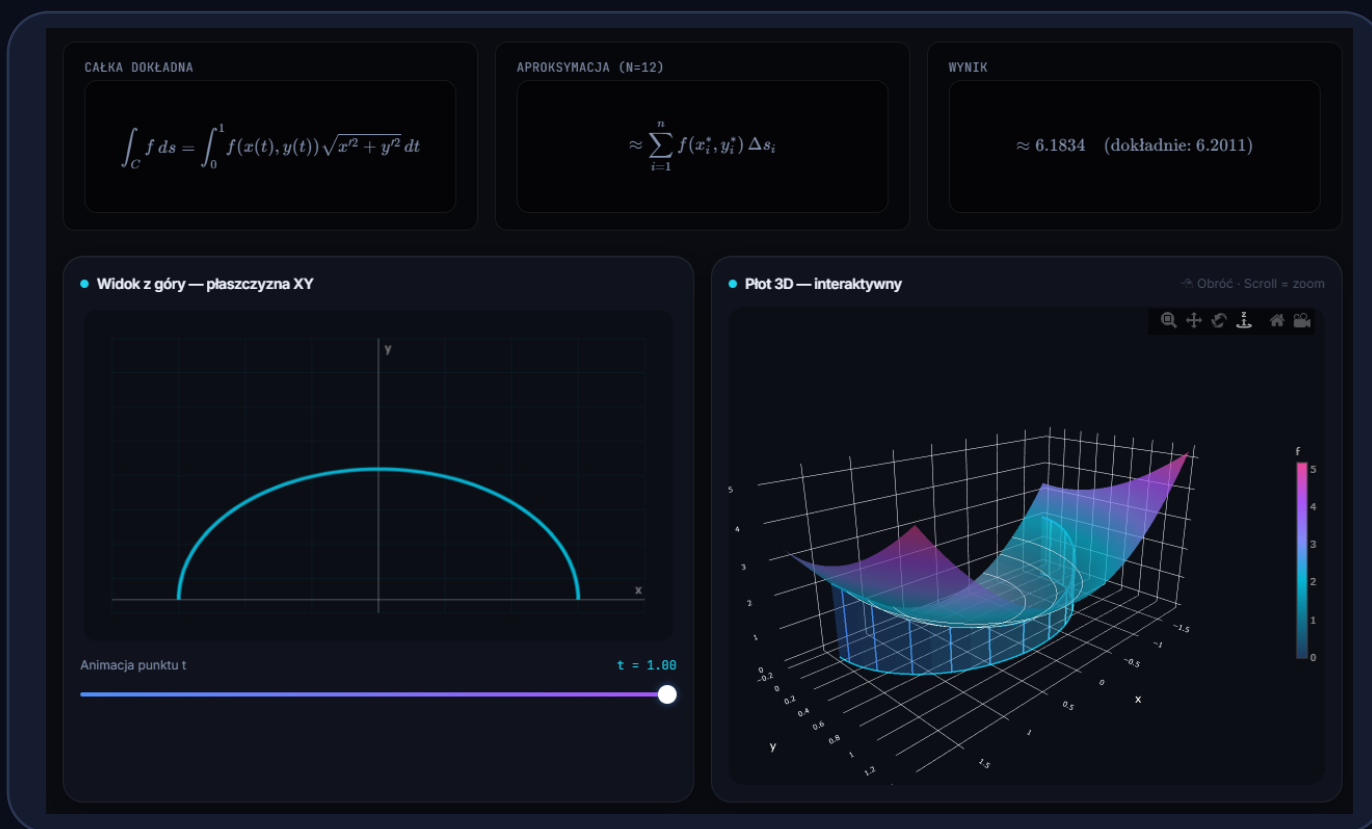


**Zamiast prostokątów** — prostopadłościany pod powierzchnią  $z(x,y)$ . Suma  $\rightarrow$  całka podwójna.

**Dziedzina całkowania** to teraz obszar D na płaszczyźnie. Widać, jak go pokrywamy siatką.

**Animacja 3D** pozwala obrócić bryłę i zobaczyć, czym naprawdę jest  $\iint \iint f dA$ .

# Płot nad krzywą — całka krzywoliniowa

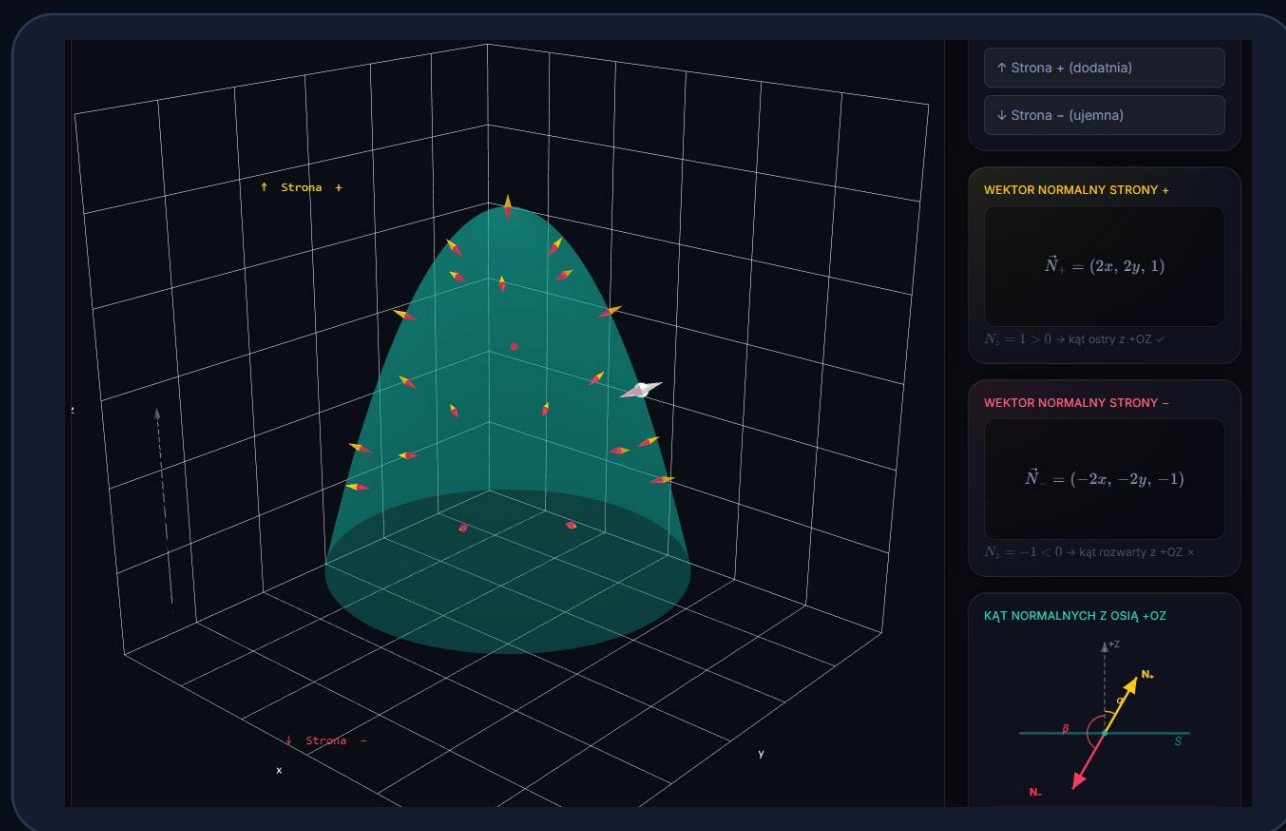


**Krzywa C w płaszczyźnie**, funkcja  $f(x,y)$  = wysokość. Całka to pole bocznej powierzchni płotu.

**Nie „po obszarze”**, lecz „po krzywej” — to zasadnicza różnica od całki podwójnej.

**Animacja pokazuje definicję**, nie zastosowanie. Student buduje intuicję przed wzorem.

# Strona „+” i „-” — orientacja powierzchni



**Całka powierzchniowa zorientowana** zależy od tego, z której strony patrzymy — strumień przez powierzchnię ma znak.

**Normalny wektor n** wskazuje stronę dodatnią. Obrócenie powierzchni zmienia znak całki.

**Animacja pozwala** zobaczyć, jak normalny obraca się wzdłuż płata i co zmienia orientacja.

# Wykładowca nie znika — zmienia rolę

1

## Autor koncepcji

Decyduje, które pojęcie i jak pokazać. To wybór dydaktyczny, nie techniczny.

2

## Ekspert merytoryczny

Pilnuje poprawności matematycznej i recenzuje każdy efekt.

3

## Projektant doświadczeń

Z nadawcy wzorów staje się twórcą sytuacji, w których rodzi się intuicja.

4

## Krytyczny recenzent

AI może się mylić — odwrócone osie, złe przekształcenia. Bez wiedzy dziedzinowej błędy przejdą niezauważone.

CZĘŚĆ II · Jak to powstało

# Co siedzi pod maską AI

● Prowadzi: **Adrian Stańdo** · Capgemini Invent · PJATK

# AI to nie tylko ChatGPT

## Sztuczna inteligencja (AI)

Nazwa pochodzi z 1955 r. · Paradygmat projektowania systemów realizujących zadania uznawane za inteligentne

### Systemy regułowe

Reguły decyzyjne budowane statycznie, bez uczenia na danych treningowych

*np. systemy eksperckie, drzewa decyzyjne z ręcznie kodowanymi regułami IF-THEN*

### Uczenie maszynowe (ML)

Reguły wyznaczone automatycznie na podstawie danych treningowych

Modele  
dyskryminacyjne

Modele  
generatywne

Uczenie ze  
wzmocnieniem

# Dyskryminacyjne vs Generatywne

## Modele dyskryminacyjne

Modelują zależność warunkową między cechami a wynikiem, aby przewidzieć konkretną wartość liczbową.

Cel — estymacja rozkładu a posteriori:

$$P(Y | X)$$

$X \in X$  (przestrzeń cech),  $Y \in Y$  (etykiety)

Predykcja — maksymalizacja rozkładu warunkowego:

$$y^* = \operatorname{argmax} P(Y=y | X=x)$$

Przykłady: klasyfikator spamu, rozpoznawanie obrazów

## Modele generatywne

Modelują ogólny rozkład danych treningowych, aby móc wygenerować ich nowe, podobne przykłady.

Cel — estymacja rozkładu danych:

$$P(X) \quad \text{lub} \quad P(X, Y)$$

Typy: GAN · Diffusion models · LLM

Inferencja — autoregresywna maksymalizacja rozkładu warunkowego:

$$P(X_{t+1} | X_1, X_2, \dots, X_t)$$

$$x^* = \operatorname{argmax} P(X_{t+1}=x_{t+1} | X_1=x_1, \dots, X_t=x_t)$$

Przykłady: GPT, Claude, Gemini, DALL-E

# Ten sam tekst — dwa różne modele

Jak reaguje model dyskryminacyjny, a jak generatywny?

„Nie rozumiem, dlaczego całka z  $\sin(x)$  od  $0$  do  $\pi$  wynosi  $2$ , a nie  $0$ ?”

## Model dyskryminacyjny

Pytanie:  $P(Y \mid \text{wiadomość})$

$Y \in \{\text{wymaga-pomocy, nie-wymaga-pomocy}\}$

$y^* = \operatorname{argmax} P(Y=y \mid X=x)$

→ "wymaga pomocy" ( $p = 0.94$ )

Klasyfikuje — nie wyjaśnia

## Model generatywny (LLM)

Pytanie:  $P(X_{t+1} \mid X_1 \dots X_t)$

$x^* = \operatorname{argmax} P(X_{t+1}=x_{t+1} \mid X_1=x_1, \dots, X_t=x_t)$

→ „Całka z  $\sin(x)$  na  $[0, \pi]$  wynosi  $2$ , bo  $-(\cos(\pi)-\cos(0))=2$ .”

Generuje odpowiedź token po tokenie

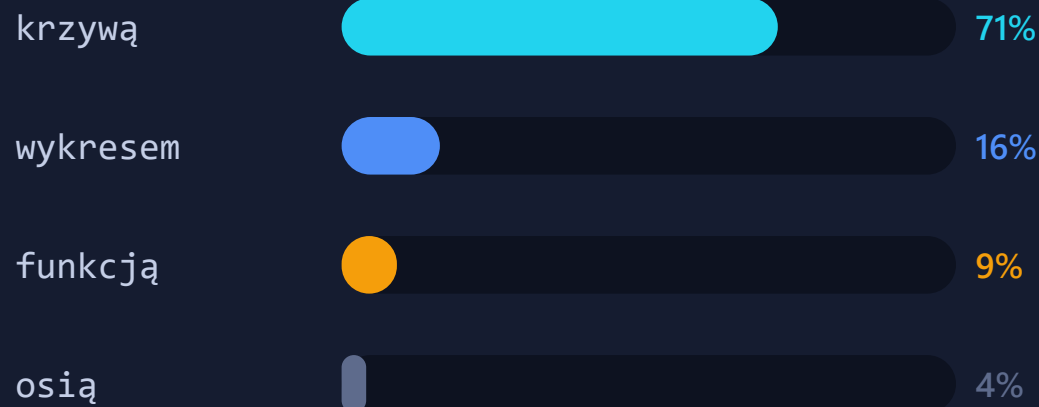
# Słowo po słowie

**Model nie myśli zdaniami.** Czyta tekst i przewiduje najbardziej prawdopodobny kolejny fragment — token.

**Dokleja go i powtarza.** Słowo po słowie buduje całą odpowiedź.

**To wszystko.** Cała "pozorna" inteligencja bierze się z bardzo dobrego przewidywania następnego tokenu.

Całka oznaczona to pole pod \_\_\_\_\_



*Model wybiera "krzywą" i pyta o następny token (tu: słowo). I tak w kółko.*

# Nie tylko ChatGPT — cała rodzina LLMów



OpenAI

GPT

model komercyjny, w chmurze



Anthropic

Claude

model komercyjny, w chmurze



Google

Gemini

model komercyjny, w chmurze

...a obok — modele otwarte (open-source), np.: **Llama, Gemma, Mistral**

**Można uruchomić na własnym sprzęcie kilkoma komendami** — np. poprzez Ollama czy Google Edge Gallery na smartfonach. Modele działają bez chmury, bez wysyłania danych na zewnątrz.

**Dane pod kontrolą.** Niezbędne do pracy z danymi tajnymi u poufnymi.

# Czym jest **agent AI**?

Sam model tylko generuje tekst. Dołącz mu cztery elementy — i zaczyna oddziaływać ze światem zewnętrznym.



Z tego powstaje **agent AI** — chatbot nowej generacji, który nie tylko mówi, ale **działa**.

*Jest to uproszczony model – w dzisiejszych czasach można dodać jeszcze MCP, skille, wielopoziomą organizację instrukcji, bezpieczeństwo, autoryzację, itd.*

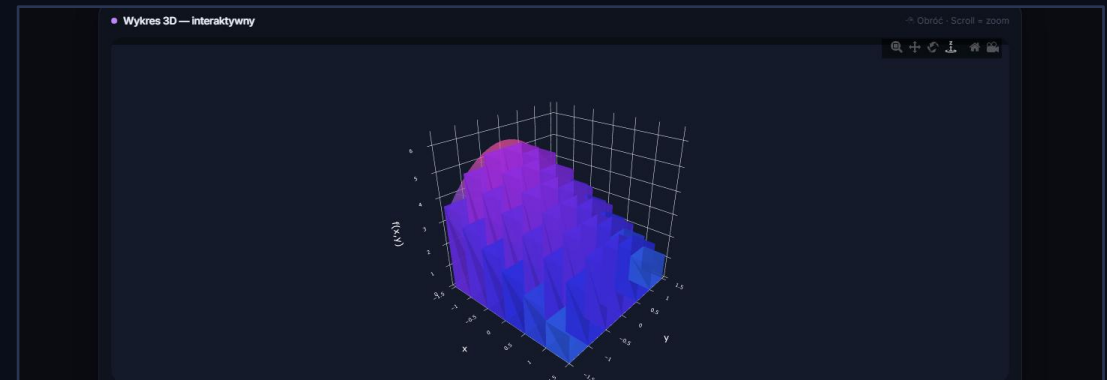
# Claude Code — agent, który programuje

Asystent działający w terminalu. Mówisz mu, czego chcesz — zwykłym językiem.

- **Czyta i zapisuje pliki**  
ma dostęp do całego projektu
- **Uruchamia polecenia**  
instaluje, buduje i testuje kod
- **Pamięta zasady projektu**  
plik z instrukcjami = jego pamięć  
skille = powtarzalne procedury i instrukcje w trakcie pisania kodu

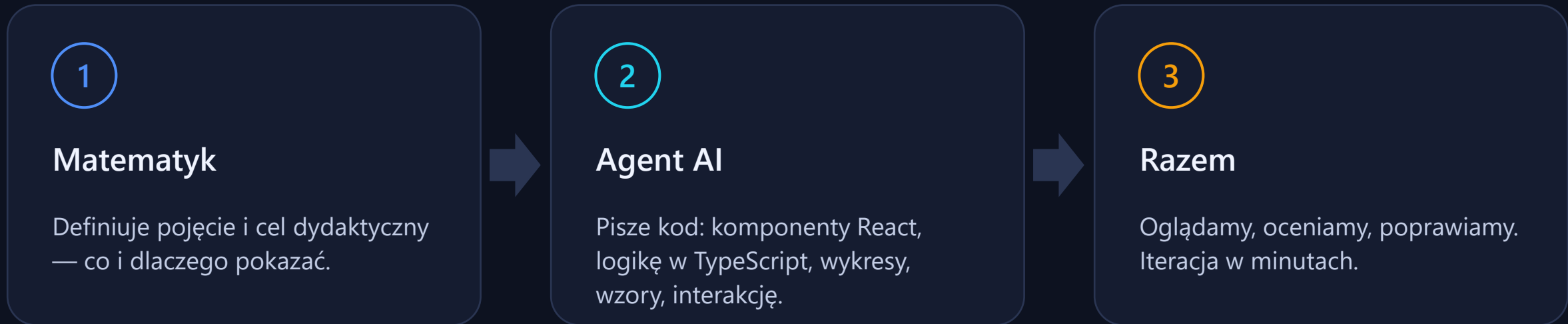
TY PISZESZ:

„Dodaj wizualizację sumy Riemanna z suwakiem N i wykresem 3D.”



...gotowy, działający komponent — w minuty.

# Jak powstała ta aplikacja



Efekt: tygodnie pracy zespołu programistów → godziny. Człowiek pozostaje ekspertem — AI jest wykonawcą.

**Wiedza dziedzinowa jest kluczowa:** AI proponuje, matematyk weryfikuje. Błędy w kodzie (odwrócone osie, złe przekształcenia) są subtelne — wykrywa je tylko ekspert.

# Cztery wnioski

1

**Intuicja potrzebuje narzędzi.**

Interaktywna wizualizacja buduje obraz, którego nie da tablica.

2

**AI tworzy materiały — w godzinę.**

Wykładowca robi to sam, bez zespołu programistów.

3

**Rola nauczyciela rośnie, nie maleje.**

Z nadawcy wzorów — w projektanta doświadczeń i eksperta.

4

**Wiedza dziedzinowa jest niezbędna.**

AI może się mylić. Tylko ekspert wyłapie błąd merytoryczny — krytyczne myślenie to nie opcja, to wymóg.



**Wypróbuj animacje!**

<https://animacje-matematyczne.github.io>

Dziękujemy za uwagę. **Chętnie odpowiemy na pytania.**