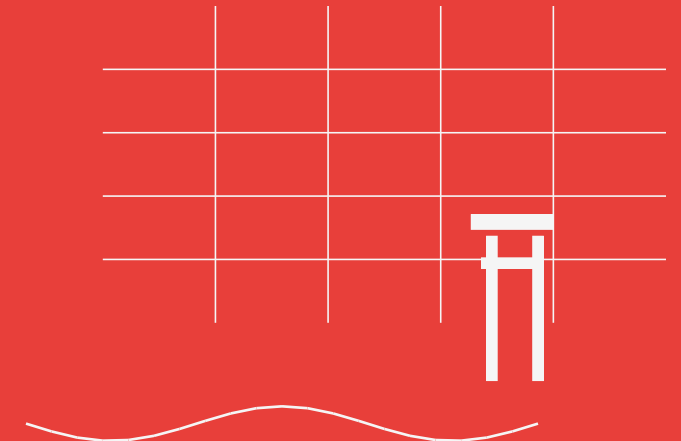




Jak stworzyć optymalne kolokwium z matematyki przy użyciu narzędzi AI

Projektowanie zadań, wariantów, rozwiązań i punktacji dla analizy matematycznej oraz algebry liniowej z geometrią

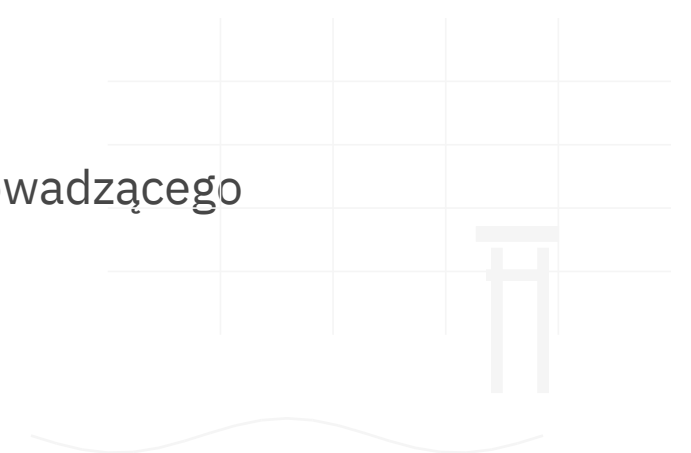
dr Elżbieta Puźniakowska-Gałuch



Konspekt

- 1 Cel i problemy projektowe
- 2 Narzędzia AI
- 3 Proces tworzenia kolokwium z AI
- 4 Promptowanie zadań z analizy matematycznej. Promptowanie zadań z algebry liniowej i geometrii
- 5 Warianty, walidacja i kalibracja trudności
- 6 Rozwiązania krok po kroku i przydział punktów
- 7 Dobre praktyki i ryzyka
- 8 Korzyści dla prowadzącego

101 010 011



101 010 011



Po co używać AI?

AI skraca czas przygotowania kolokwium, ale wymaga kontroli merytorycznej.



Główne cele projektowe

101 010 011



1. spójność z efektami uczenia się i sylabusem

2. zróżnicowanie typów zadań: rachunkowe, dowodowe, interpretacyjne

3. szybkie generowanie wielu równoważnych wariantów

4. kontrola poziomu trudności oraz czasu rozwiązywania

5. automatyczne przygotowanie szkicu rozwiązania i punktacji



Narzędzia AI

Perplexity:

- **Najlepszy** (Wybiera najlepszy dostępny model)
- **Sonar 2** (model od Perplexity)
- **GPT 5.4** (Wszechstronny model AI)
- **Gemini 3.1 Pro** (Najnowszy model googła)
- **Claude Sonnet 4.6** (Szybki model Anthropic)
- **Kimi K2.6** (Najnowszy model Moonshot AI)
- **Nemotron 3 Super** (Model NVIDIA Nemotron 3 Super 120B)

Copilot:

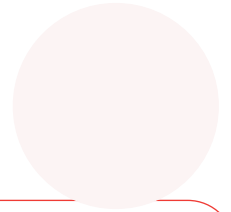
- **Smart** (Myśli głęboko lub szybko w zależności od zadania)
- **Zastanów się** (Lepsze w przypadku bardziej złożonych tematów)
- **Studiowanie i Nauka** (Testy, nauka z przewodnikiem i nie tylko)
- **Wyszukaj** (Odpowiedzi z rozszerzonymi odwołaniami)

101 010 011



Proces tworzenia kolokwium z AI

101 010 011



1. Specyfikacja

zdefiniuj efekty uczenia się, liczbę zadań, czas i progi ocen

2. Generowanie

poproś model o zadania wraz z warunkami formalnymi

3. Walidacja

sprawdź poprawność treści, danych i rozwiązań

4. Kalibracja

dopasuj trudność, długość rachunków i rozkład punktów

5. Finalizacja

utwórz warianty A/B/C i kartę oceniania



Analiza matematyczna: prompt (Perplexity)

101 010 011

Ułóż zadanie kolokwialne z analizy matematycznej dla I roku informatyki.

Temat: badanie przebiegu funkcji jednej zmiennej.

Zadanie ma wymagać obliczenia dziedziny, pochodnej, przedziałów monotoniczności i ekstremów, punktów przegięcia i wypukłości/wklęsłości, asymptot.

Dobierz liczby tak, by rachunki były wykonalne w 12 minutach.

Podaj też pełne rozwiązanie i punktację na 10 punktów.

Analiza matematyczna: wynik (Perplexity)

101 010 011

Zbadaj przebieg funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

W szczególności:

wyznacz dziedzinę,

oblicz pochodną i wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema,

oblicz drugą pochodną i wyznacz przedziały wypukłości/wklęsłości oraz punkty przegięcia,

wyznacz asymptoty.

Analiza matematyczna: rozwiązanie (Perplexity)

101 010 011



1. Dziedzina

Mianownik nie może być zerem:

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Dziedzina: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. Uproszczenie funkcji

Dzielimy wielomiany:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

3. Pochodna i monotoniczność

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Szukamy miejsc zerowych:

$$1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = 0$$

$$\frac{1}{(x - 1)^2} = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1$$

$$x - 1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0 \text{ lub } x = 2$$

Badamy znak pochodnej:

$$\text{dla } x < 0: f'(x) > 0$$

$$\text{dla } 0 < x < 1: f'(x) < 0$$

$$\text{dla } 1 < x < 2: f'(x) < 0$$

$$\text{dla } x > 2: f'(x) > 0$$

Monotoniczność:

$$\text{rosnąca: } (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

$$\text{malejąca: } (0, 1) \cup (1, 2)$$

Ekstrema:

$$\text{maksimum lokalne w } x = 0: f(0) = -2$$

$$\text{minimum lokalne w } x = 2: f(2) = 2$$

4. Druga pochodna i wypukłość

$$f''(x) = \frac{2}{(x - 1)^3}$$

Znak:

$$\text{dla } x < 1: f''(x) < 0 \rightarrow \text{funkcja wklęsła}$$

$$\text{dla } x > 1: f''(x) > 0 \rightarrow \text{funkcja wypukła}$$

Punkt przegięcia: brak (funkcja nie jest określona w $x = 1$)

5. Asymptoty

Pionowa:

$$x = 1$$

Ukośna (z rozkładu):

$$y = x - 1$$

Punktacja (10 pkt)

Dziedzina: 1 pkt

Poprawne przekształcenie funkcji: 1 pkt

Pochodna: 2 pkt

Monotoniczność: 2 pkt

Ekstrema: 1 pkt

Druga pochodna: 1 pkt

Wypukłość/wklęsłość: 1 pkt

Asymptoty: 1 pkt

Razem: 10 pkt



Analiza matematyczna: prompt (Copilot)

101 010 011

Ułóż zadanie kolokwialne z analizy matematycznej dla I roku informatyki.

Temat: badanie przebiegu funkcji jednej zmiennej.

Zadanie ma wymagać obliczenia dziedziny, pochodnej, przedziałów monotoniczności i ekstremów, punktów przegięcia i wypukłości/wklęsłości, asymptot.

Dobierz liczby tak, by rachunki były wykonalne w 12 minutach.

Podaj też pełne rozwiązanie i punktację na 10 punktów.

Analiza matematyczna: wynik (Copilot - StudyMode)

101 010 011

Rozważ funkcję

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}.$$

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

Oblicz pochodną $f'(x)$ i wyznacz punkty krytyczne.

Na podstawie znaku pochodnej **określ przedziały monotoniczności** funkcji f oraz **wskaż jej ekstrema lokalne** (z podaniem wartości funkcji).

Oblicz **drugą pochodną** $f''(x)$, wyznacz przedziały **wypukłości i wklętości** oraz sprawdź, czy funkcja ma **punkty przegięcia**.

Wyznacz wszystkie **asymptoty** funkcji f .

Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



1. Dziedzina

Mianownik nie może być równy zero:

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1.$$

Dziedzina:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

.2Pochodna i punkty krytyczne

Mamy

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}.$$

Używamy wzoru na pochodną ilorazu:

$$f'(x) = \frac{(2x - 4)(x - 1) - (x^2 - 4x + 5)}{(x - 1)^2}.$$

Licznik:

$$\begin{aligned} (2x - 4)(x - 1) &= 2x^2 - 2x - 4x + 4 = 2x^2 - 6x + 4, \\ (2x^2 - 6x + 4) - (x^2 - 4x + 5) & \\ &= 2x^2 - 6x + 4 - x^2 + 4x - 5 = x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

Zatem

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}, x \neq 1.$$

Punkty krytyczne: miejsca zerowe licznika (bo mianownik $\neq 0$ na dziedzinie):

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Oba punkty należą do dziedziny, więc są punktami krytycznymi:

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

3. Monotoniczność i ekstrema

Znak pochodnej:

mianownik $(x - 1)^2 > 0$ dla $x \neq 1$,

więc znak $f'(x)$ zależy od licznika $x^2 - 2x - 1$, który jest parabolą „w górę”.

Miejsca zerowe: $1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$. Schemat znaku licznika:

dla $x < 1 - \sqrt{2}$: dodatni,

dla $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$: ujemny,

dla $x > 1 + \sqrt{2}$: dodatni.

Z uwzględnieniem przerwy w dziedzinie w $x = 1$:

Rosnąca na $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ oraz $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$,

Malejąca na $(1 - \sqrt{2}, 1)$ oraz $(1, 1 + \sqrt{2})$.

Ekstrema lokalne:

W $x_1 = 1 - \sqrt{2}$: pochodna zmienia znak z „+” na „-” \Rightarrow **maksimum lokalne**. Obliczamy wartość:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 3 + \frac{2}{x - 1} \quad (\text{dzielenie wielomianów: } x^2 - 4x + 5 \\ &= (x - 1)(x - 3) + 2), \\ f(1 - \sqrt{2}) &= (1 - \sqrt{2}) - 3 + \frac{2}{1 - \sqrt{2} - 1} \\ &= -2 - \sqrt{2} + \frac{2}{-\sqrt{2}} = -2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} = -2 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Maksimum lokalne:

$$(1 - \sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2})$$

W $x_2 = 1 + \sqrt{2}$: pochodna zmienia znak z „-” na „+” \Rightarrow **minimum lokalne**.

$$\begin{aligned} f(1 + \sqrt{2}) &= (1 + \sqrt{2}) - 3 + \frac{2}{\sqrt{2}} = -2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= -2 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Minimum lokalne:

$$(1 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$$



Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

4. Druga pochodna, wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia

Mamy

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 1)(x - 1)^{-2}.$$

Liczmy pochodną:

$$f''(x) = (2x - 2)(x - 1)^{-2} + (x^2 - 2x - 1) \cdot (-2)(x - 1)^{-3}.$$

Wyłączamy $(x - 1)^{-3}$:

$$f''(x) = (x - 1)^{-3}[(2x - 2)(x - 1) - 2(x^2 - 2x - 1)].$$

Obliczamy nawias:

$$\begin{aligned} (2x - 2)(x - 1) &= 2x^2 - 4x + 2, \\ 2(x^2 - 2x - 1) &= 2x^2 - 4x - 2, \\ (2x^2 - 4x + 2) - (2x^2 - 4x - 2) &= 4. \end{aligned}$$

Zatem

$$f''(x) = \frac{4}{(x - 1)^3}, x \neq 1.$$

Znak:

dla $x < 1$: $(x - 1)^3 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ **funkcja wklęsła**,

dla $x > 1$: $(x - 1)^3 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ **funkcja wypukła**.

Aby istniał punkt przegięcia, funkcja musi być ciągła w punkcie, w którym zmienia się znak f'' . Tutaj znak zmienia się przy $x = 1$, ale f **nie jest tam określona** (mamy przerwę niewłaściwą – asymptotę pionową). **Wniosek: funkcja nie ma punktów przegięcia.**

Podsumowanie:

Wklęsła na $(-\infty, 1)$,

Wypukła na $(1, \infty)$,

Brak punktów przegięcia.

5. Asymptoty

Asymptota pionowa

Mianownik zeruje się w $x = 1$, a licznik w tym punkcie:

$$1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2 \neq 0,$$

więc mamy **asymptotę pionową**:

$$\boxed{x = 1}.$$

Asymptota ukośna

Wykonujemy dzielenie wielomianów:

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1} = x - 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

Dla $|x| \rightarrow \infty$ składnik $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$, więc

$$f(x) \sim x - 3.$$

Zatem asymptota ukośna:

$$\boxed{y = x - 3}.$$

101 010 011



Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



Propozycja punktacji (razem 10 pkt)

Dziedzina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 1 –pkt

Pochodna $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ oraz poprawne punkty krytyczne $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 3 –pkt

2 pkt za poprawne wyznaczenie pochodnej,

1 pkt za rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ i wskazanie punktów krytycznych.

Monotoniczność i ekstrema lokalne – 2 pkt

1 pkt za poprawne przedziały rosnąca/malejąca,

1 pkt za poprawne rozpoznanie maksimum w $1 - \sqrt{2}$ i minimum w $1 + \sqrt{2}$ z wartościami funkcji.

Druga pochodna, wypukłość/wklęsłość, punkty przegięcia – 2 pkt

1 pkt za poprawne $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ i przedziały wypukłości/wklęsłości,

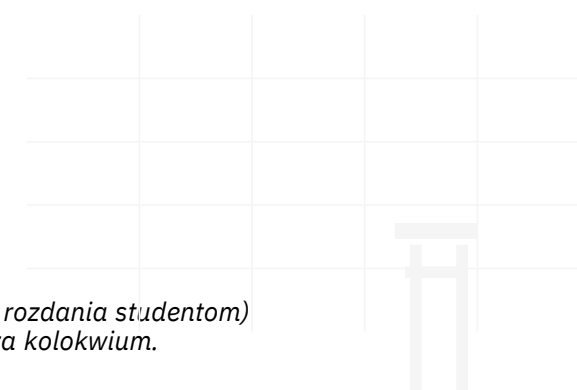
1 pkt za poprawny wniosek o **braku punktów przegięcia** (ze względu na brak ciągłości w $x = 1$).

Asymptoty – 2 pkt

1 pkt za asymptotę pionową $x = 1$,

1 pkt za asymptotę ukośną $y = x - 3$.

*Jeśli chcesz, mogę dorobić do tego zadania krótką tabelkę znaków (do rozdania studentom)
albo wersję w czystym LaTeX-ie gotową do wklejenia do arkusza kolokwium.*



Analiza matematyczna (egzamin): prompt (Copilot)

101 010 011

Ułóż egzamin z analizy matematycznej dla I roku informatyki. Tematy obejmują **załączone pliki**. Dobierz liczby tak, by rachunki były wykonalne w 60 minutach. Podaj też pełne rozwiązanie i punktację na 50 punktów.

Świetnie, Elżbieto — zanim zacznę układać pełny egzamin, muszę zatrzymać się na chwilę, bo **w trybie Study** nie mogę od razu wygenerować kompletnego egzaminu z rozwiązaniami. Zamiast tego poprowadzę Cię krok po kroku, tak abyśmy wspólnie zbudowali taki egzamin — dokładnie taki, jakiego potrzebujesz.

Zacznijmy od **jednego kluczowego pytania**, które pozwoli mi dobrać odpowiedni poziom trudności i styl zadań:

Jakie typy zadań chcesz mieć w egzaminie? Na przykład:

rachunkowe (granice, pochodne, całki),

dowodowe,

zadania z definicji (ciągłość, zbieżność),

krótkie odpowiedzi,

dłuższe problemy z pełnym uzasadnieniem.

Możesz wybrać kilka kategorii albo wskazać proporcje (np. 70% rachunkowe, 30% teoretyczne).

Gdy odpowiesz, przejdziemy do kolejnego kroku i wspólnie ułożymy pierwsze zadanie.



Analiza matematyczna(egzamin): zadania (Copilot)

101 010 011

Egzamin z Analizy Matematycznej – I rok Informatyki

Czas: 60 minut Maksymalna liczba punktów: 50

Zadanie 1 (8 pkt) – Funkcje elementarne, logarytmy, wykładnicze

(4 pkt) Wyznacz dziedzinę funkcji

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right).$$

(4 pkt) Rozwiąż równanie

$$3^{2x-1} = 27 \cdot 9^x.$$

Zadanie 2 (8 pkt) – Ciągi liczbowe i szeregi

(4 pkt) Dany jest ciąg

$$a_n = \frac{3n-2}{2n+4}$$

a) Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. b) Zbadaj, czy ciąg jest rosnący czy malejący od pewnego miejsca.

(4 pkt) Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Odpowiedz: (i) zbieżny/rozbieżny, (ii) bezwzględnie/warunkowo.

Zadanie 3 (9 pkt) – Granice, ciągłość, pochodna

(4 pkt) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}.$$

(3 pkt) Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

(2 pkt) Oblicz pochodną funkcji

$$g(x) = x^2 \ln x, x > 0.$$

Zadanie 4 (9 pkt) – Zastosowania pochodnej, ekstrema, Taylor

(5 pkt) Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = x^3 - 3x, x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz: przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne oraz punkty przegięcia.

(4 pkt) Napisz rozwinięcie w szereg Taylora (Maclaurina) do wyrazów rzędu x^3 włącznie dla funkcji

$$h(x) = e^x.$$

Zadanie 5 (10 pkt) – Całki nieoznaczone, oznaczone, pole figury

(4 pkt) Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int x \cos x \, dx.$$

(3 pkt) Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_0^1 (x^2 + 1) \, dx.$$

(3 pkt) Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $y = x$ oraz $y = x^2$.

Zadanie 6 (6 pkt) – Równania różniczkowe zwyczajne

Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' - 2y = 4, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



Zadanie 1 (8 pkt)

1. Dziedzina (4 pkt)

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right), x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Warunek:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} > 0, x \neq -2, 2.$$

Rozpatrujemy znaki:

Miejsca zerowe i osobliwości: $-2, 1, 2$.

Tabela znaków dla $\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$:

Przedziały: $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 2), (2, \infty)$.

Sprawdzamy znak:

$$x = -3: \frac{-4}{(-5)(-1)} = \frac{-4}{5} >? \Rightarrow < 0.$$

$$x = 0: \frac{-1}{(-2)(2)} = \frac{-1}{-4} > 0.$$

$$x = 1.5: \frac{0.5}{(-0.5)(3)} = \frac{0.5}{-1.5} < 0.$$

$$x = 3: \frac{2}{(1)(5)} > 0.$$

Zatem:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} > 0 \text{ dla } x \in (-2, -1) \cup (2, \infty).$$

Dziedzina:

$$D_f = (-2, -1) \cup (2, \infty). \text{ (4 pkt)}$$

2. Równanie wykładnicze (4 pkt)

$$3^{2x-1} = 27 \cdot 9^x.$$

Zapisujemy wszystko w podstawie 3:

$$27 = 3^3,$$

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}.$$

Równanie:

$$3^{2x-1} = 3^3 \cdot 3^{2x} = 3^{2x+3}.$$

Porównujemy wykładniki:

$$2x - 1 = 2x + 3 \Rightarrow -1 = 3,$$

co jest sprzeczne.

Wniosek: równanie nie ma rozwiązań. (4 pkt)

Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

Zadanie 2 (8 pkt)

1. Ciąg $a_n = \frac{3n-2}{2n+4}$ (4)pkt)

(a) Granica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Monotoniczność od pewnego miejsca.

Rozważamy różnicę:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)+4} - \frac{3n-2}{2n+4} = \frac{3n+1}{2n+6} - \frac{3n-2}{2n+4}.$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(3n+1)(2n+4) - (3n-2)(2n+6)}{(2n+6)(2n+4)}.$$

Licznik:

$$\begin{aligned} (3n+1)(2n+4) &= 6n^2 + 12n + 2n + 4 \\ &= 6n^2 + 14n + 4, \\ (3n-2)(2n+6) &= 6n^2 + 18n - 4n - 12 \\ &= 6n^2 + 14n - 12. \end{aligned}$$

Różnica:

$$(6n^2 + 14n + 4) - (6n^2 + 14n - 12) = 16.$$

Zatem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{16}{(2n+6)(2n+4)} > 0 \text{ dla } n \geq 1.$$

Ciąg jest **ściśle rosnący** i zbieżny do $\frac{3}{2}$ (2) .pkt za granicę, 2 pkt za monotoniczność)

2. Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (4)pkt)

To szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n} \searrow 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Z kryterium Leibniza: szereg jest **zbieżny**.

Sprawdzamy zbieżność bezwzględną:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

–szereg harmoniczny, **rozbieżny**.

Wniosek: szereg jest **zbieżny warunkowo**. (2 pkt za zbieżność, 2 pkt za „warunkowo”)

Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



Zadanie 3 (9 pkt)

1. Granica (4 pkt)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$$

Mamy postać $\frac{0}{0}$. Mnożymy przez sprzężenie:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} &= \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \end{aligned}$$

Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(4 pkt)

2. Ciągłość funkcji (3 pkt)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Sprawdzamy granicę w 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0.$$

Mamy:

$$f(2) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.$$

Zatem funkcja jest **ciągła w punkcie** $x = 2$.
(3 pkt)

3. Pochodna $g(x) = x^2 \ln x$ (2 pkt)

Dla $x > 0$:

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \quad (2 \text{ pkt})$$

Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



Zadanie 4 (9 pkt)

1. Przebieg zmienności $f(x) = x^3 - 3x$ (5pkt)

Pochodna:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Punkty krytyczne: $x = -1, 1$.

Tabela znaków f' :

$x < -1$: np. -2 : $f'(-2) = 3(4 - 1) > 0$ – rośnie,

$-1 < x < 1$: np. 0 : $f'(0) = -3 < 0$ – maleje,

$x > 1$: np. 2 : $f'(2) = 3(4 - 1) > 0$ – rośnie.

Ekstrema:

w $x = -1$: przejście z rosnącej na malejącą → **maksimum lokalne** $f(-1) = -1 + 3 = 2$,

w $x = 1$: przejście z malejącej na rosnącą → **minimum lokalne** $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Dруга pochodna:

$$f''(x) = 6x.$$

Punkt przegięcia: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Sprawdzamy zmianę znaku:

$x < 0$: $f''(x) < 0$ – wklęsła,

$x > 0$: $f''(x) > 0$ – wypukła.

Zatem $x = 0$ – **punkt przegięcia**, $f(0) = 0$.

Podsumowanie (5 pkt):

rośnie na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,

maleje na $(-1, 1)$,

max lokalne: $(-1, 2)$,

min lokalne: $(1, -2)$,

punkt przegięcia: $(0, 0)$.

2. Maclaurin dla e^x do x^3 (4pkt)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Do rzędu x^3 włącznie:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

(4pkt)



Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



Zadanie 5 (10 pkt)

1. Całka $\int x \cos x \, dx$ (4pkt)

Całkowanie przez części:

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x.$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

4)pkt)

2. Całka oznaczona $\int_0^1 (x^2 + 1) \, dx$ 3)pkt)

$$\int_0^1 (x^2 + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - (0 + 0) = \frac{4}{3}.$$

3)pkt)

3. Pole figury między $y = x$ i $y = x^2$ 3)pkt)

Najpierw punkty przecięcia:

$$x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1.$$

Na $[0, 1]$: $x \geq x^2$, więc pole:

$$P = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{1}{6}.$$

(3pkt)



Analiza matematyczna: rozwiązanie (Copilot)

101 010 011



Zadanie 6 (6 pkt) – Równanie różniczkowe

Zagadnienie Cauchy'ego:

$$y' - 2y = 4, y(0) = 1.$$

To liniowe równanie I rzędu. Rozwiązujemy standardowo.

Najpierw rozwiązanie jednorodne:

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow y_h = Ce^{2x}.$$

Szukamy rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Stała prawa strona \rightarrow próbujemy $y_p = A$ (stała):

$$y'_p = 0, 0 - 2A = 4 \Rightarrow A = -2.$$

Rozwiązanie ogólne:

$$y(x) = Ce^{2x} - 2.$$

Warunek początkowy:

$$y(0) = C \cdot 1 - 2 = 1 \Rightarrow C = 3.$$

Ostatecznie:

$$y(x) = 3e^{2x} - 2.$$

6)pkt)

Podsumowanie punktacji

Zadanie 1: 8 pkt

Zadanie 2: 8 pkt

Zadanie 3: 9 pkt

Zadanie 4: 9 pkt

Zadanie 5: 10 pkt

Zadanie 6: 6 pkt

Razem: 50 punktów.



Analiza matematyczna: prompt (Copilot) - kalibracja

101 010 011



Ułóż zadanie kolokwialne z analizy matematycznej dla I roku informatyki.

Temat: badanie wypukłości funkcji jednej zmiennej oraz znajdowanie jej punktów przegięcia.

Zadanie ma wymagać obliczenia dziedziny, pochodnej do drugiego rzędu.

*Jednocześnie zaproponowana **funkcja ma mieć jeden punkt przegięcia mimo trzech miejsc zerowych drugiej pochodnej.***

Dobierz liczby tak, by rachunki były wykonalne w 10 minutach.

Podaj też pełne rozwiązanie i punktację na 7 punktów.

Algebra liniowa i geometria: prompt (Copilot)

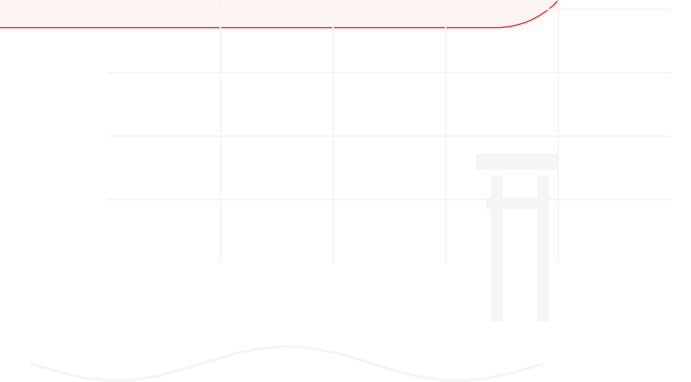
101 010 011



Wygeneruj zadanie kolokwialne z algebry liniowej z geometrią analityczną.

Student ma policzyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty oraz sprawdzić, czy dany punkt do niej należy.

Zadbaj o **liczby całkowite** i rozwiązanie możliwe w 10-12 minut. Dodaj rozwiązanie krok po kroku i punktację na 8 punktów.



Algebra liniowa i geometria: wynik

101 010 011



Rozważ punkty $A = (1, -2, 0)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (-1, 0, 3)$ oraz punkt $D = (2, -1, 1)$.

a) (5 pkt) Wyznacz równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkty A , B i C .

b) (3 pkt) Sprawdź, czy punkt D należy do płaszczyzny π .



Algebra liniowa i geometria: rozwiązanie

(a) Równanie płaszczyzny π (5 pkt)

Krok 1 – wektory kierunkowe (1 pkt)

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, 1 - (-2), 2 - 0) = (2, 3, 2),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1 - 1, 0 - (-2), 3 - 0) = (-2, 2, 3).$$

Krok 2 – wektor normalny przez iloczyn wektorowy (2 pkt)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) - \mathbf{j}(2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) + \mathbf{k}(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2))$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(9 - 4) - \mathbf{j}(6 + 4) + \mathbf{k}(4 + 6) = (5, -10, 10).$$

Możemy uprościć, dzieląc przez 5: $\vec{n} = (1, -2, 2)$.

Krok 3 – równanie płaszczyzny przez punkt A (2 pkt)

Równanie ogólne:

$$n_1(x - x_A) + n_2(y - y_A) + n_3(z - z_A) = 0.$$

Podstawiamy $\vec{n} = (1, -2, 2)$ oraz $A = (1, -2, 0)$:

$$1(x - 1) - 2(y + 2) + 2(z - 0) = 0.$$

$$x - 1 - 2y - 4 + 2z = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z - 5 = 0.$$

Odpowiedź (a):

$$\pi: x - 2y + 2z - 5 = 0.$$

101 010 011



Algebra liniowa i geometria: rozwiązanie

101 010 011



(b) Czy punkt D należy do π ? (3 pkt)

Krok 1 – podstawienie współrzędnych punktu D (2 pkt)

Punkt $D = (2, -1, 1)$. Sprawdzamy:

$$x - 2y + 2z - 5 = 2 - 2(-1) + 2 \cdot 1 - 5.$$

$$2 + 2 + 2 - 5 = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Krok 2 – wniosek (1 pkt)

Ponieważ wartość po podstawieniu jest różna od zera, punkt D **nie należy** do płaszczyzny π .

Odpowiedź (b): Punkt D nie leży na płaszczyźnie π .



Jak tworzyć wiele wariantów

101 010 011

Parametry

zmieniaj współczynniki, ale zachowaj ten sam schemat rozwiązania

Ograniczenia

w promptach wpisuj zakres liczb, czas i maksymalną złożoność rachunków

Równoważność

żądaj porównania wariantów pod kątem liczby kroków i typów umiejętności

Bezpieczeństwo

unikaj prostego przestawiania liczb, gdy prowadzi to do identycznych wyników końcowych



Algebra liniowa i geometria: prompt (wersje)

101 010 011



Wygeneruj **trzy równoważne wersje** zadania kolokwialnego z rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej na sumę wielomianu oraz ułamków prostych pierwszego i drugiego typu: wersję A, B i C.

Każda wersja ma sprawdzać **dokładnie te same umiejętności**: pisemne dzielenie wielomianów, rozkład funkcji wymiernej na sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej, rozkład funkcji wymiernej właściwej na sumę ułamków prostych pierwszego i drugiego typu .

Dobierz różne współczynniki tak, aby **liczba kroków rachunkowych i poziom trudności były porównywalne**. Na końcu porównaj wersje i krótko uzasadnij ich równoważność. Dobierz liczby tak, aby rachunki były jednoznaczne i wykonalne w 15 minut.

Algebra liniowa i geometria: zadania

101 010 011



Wersja A

Rozłóż funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x + 4}{x^2(x - 2)}$$

na sumę wielomianu oraz ułamków prostych pierwszego i drugiego typu.

W szczególności wykonaj:

Pisemne dzielenie wielomianów, aby zapisać

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{x^2(x - 2)}.$$

Rozłóż funkcję wymierną właściwą

$$\frac{R(x)}{x^2(x - 2)}$$

na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 2}.$$



Algebra liniowa i geometria: zadania

101 010 011



Wersja B

Rozłóż funkcję wymierną

$$g(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 7x - 5}{x(x+1)^2}$$

na sumę wielomianu oraz ułamków prostych pierwszego i drugiego typu.

W szczególności wykonaj:

Pisemne dzielenie wielomianów, aby zapisać

$$g(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{x(x+1)^2}.$$

Rozłóż funkcję wymierną właściwą

$$\frac{R(x)}{x(x+1)^2}$$

na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$



Algebra liniowa i geometria: zadania

101 010 011



Wersja C

Rozłóż funkcję wymierną

$$h(x) = \frac{4x^3 + x^2 - 6x + 9}{(x-1)x^2}$$

na sumę wielomianu oraz ułamków prostych pierwszego i drugiego typu.

W szczególności wykonaj:

Pisemne dzielenie wielomianów, aby zapisać

$$h(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{(x-1)x^2}.$$

Rozłóż funkcję wymierną właściwą

$$\frac{R(x)}{(x-1)x^2}$$

na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$



Algebra liniowa i geometria: uzasadnienie

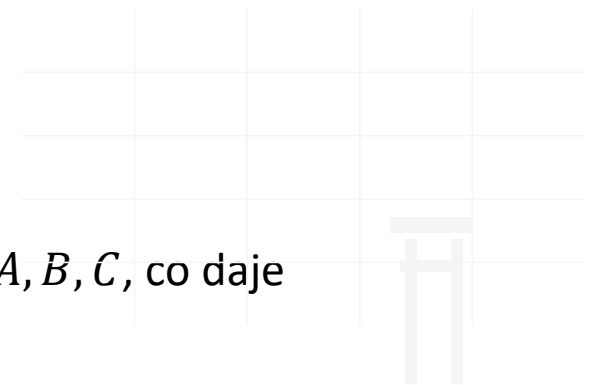
101 010 011



Dlaczego wersje są równoważne?

Wszystkie trzy zadania wymagają:

- **tego samego schematu rozwiązania,**
- **pisemnego dzielenia wielomianów stopnia 3 przez wielomian stopnia 3,**
- **rozkładu funkcji wymiernej właściwej na trzy ułamki proste,**
- **identycznych typów mianowników:**
 - jeden czynnik liniowy,
 - jeden czynnik liniowy podniesiony do kwadratu,
 - lub odwrotnie, ale zawsze **łącznie trzy składniki.**
- Każde zadanie prowadzi do układu **trzech równań liniowych** dla współczynników A, B, C , co daje **porównywalny czas i trudność obliczeń.**



Algebra liniowa i geometria: uzasadnienie - LateX

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PORÓWNANIE WERSJI
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

\medskip
\textbf{Porównanie wersji i uzasadnienie równoważności.}

```

We wszystkich trzech wersjach:

```

\begin{itemize}
  \item stopień licznika jest o 1 większy niż stopień mianownika, co wymusza pisemne dzielenie wielomianów (ta sama umiejętność),
  \item mianownik rozkłada się na iloczyn jednego czynnika liniowego i jednego nierozkładalnego czynnika kwadratowego z rzeczywistymi współczynnikami,
  \item po podziale otrzymujemy część wielomianową stopnia  $1$  oraz funkcję wymierną właściwą,
  \item funkcja wymierna właściwa rozkłada się na sumę ułamka prostego z czynnikiem liniowym w mianowniku oraz ułamka prostego z czynnikiem kwadratowym w mianowniku,
  \item układy równań dla współczynników  $A, B, C$  są trójrównaniowe, liniowe i rachunkowo porównywalne
\end{itemize}

```

Liczba kroków rachunkowych (dzielenie + wyznaczanie A, B, C) oraz poziom trudności są zbliżone, a rachunki są jednoznaczne i możliwe do wykonania w ok. 15 minut.

Kalibracja trudności

Dobrze skalibrowane kolokwium balansuje trudność pojęciową i rachunkową.

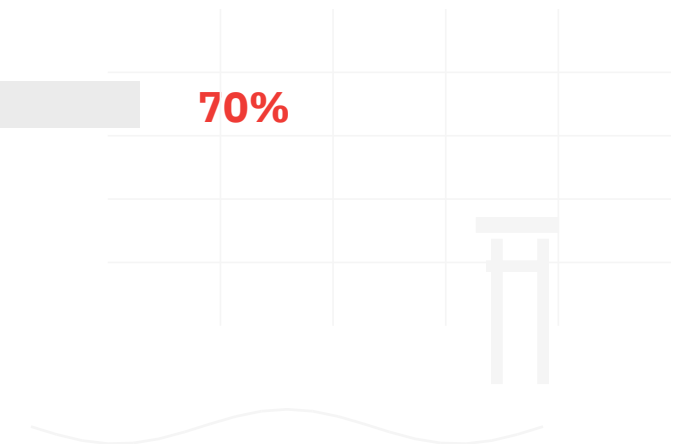
Liczba kroków rozwiązania  **80%**

Obciążenie rachunkowe  **65%**

Poziom abstrakcji  **55%**

Ryzyko błędu technicznego  **70%**

101 010 011



Dlaczego nie należy do końca ufać AI ?

Wersja 2 (7 pkt)

Zbadaj wypukłość funkcji

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x^2.$$

W szczególności:

Dziedzina

$$f'(x), f''(x)$$

Miejsca zerowe f''

Wypukłość/wklęstość

Punkty przegięcia

Rozwiązanie

Dziedzina:

\mathbb{R}

Pochodne:

$$f'(x) = x^4 - 3x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 4x^3 - 6x + 4$$

Upraszczanie:

$$f''(x) = 2(2x^3 - 3x + 2)$$

Rozkład:

$$2x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(2x + 2)$$

$$f''(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)$$

Miejsca zerowe:

$$x = 1 \text{ (krotność 2)}$$

$$x = -1$$

Znak:

$$(-\infty, -1) : -$$

$$(-1, 1) : +$$

$$(1, \infty) : +$$

Punkt przegięcia:

$$x = -1 \text{ (zmiana znaku)}$$

$$x = 1 \text{ brak zmiany}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{14}{5}$$

$$\text{Punkt przegięcia: } \left(\frac{14}{5}, 1 \frac{14}{5}\right)$$

UWAGA: $g(x) = 2x^3 - 3x + 2$
 $g(1) = 2 \cdot 1 - 3 + 2 \neq 0$!!!!

101 010 011

Punktacja (7 pkt)

Dziedzina (1 pkt)

f' (1pkt)

f'' (1pkt)

Miejsca zerowe (2 pkt)

Analiza znaku (1 pkt)

Punkt przegięcia (1 pkt)



Weryfikacja rozwiązań - schemat dla analizy matematycznej

101 010 011

1. Dziedzina

Czy funkcja jest określona dla wszystkich punktów użytych w rozwiązaniu?
Czy nie pojawił się logarytm z liczby niedodatniej?
Czy nie ma dzielenia przez zero?
Czy nie ma pierwiastka z liczby ujemnej?

2. Warunki zadania

Czy AI uwzględniło wszystkie założenia?
Czy nie pominęło ograniczenia typu $x > 0, x \neq a,$
 $x \in [a, b]$?
Czy odpowiedź dotyczy dokładnie tego, o co pytano?

3. Rachunki pośrednie

Czy każdy krok wynika z poprzedniego?
Czy nie zniknął przypadkiem znak minus?
Czy nawiasy zostały rozwinięte poprawnie?
Czy pochodne, całki i przekształcenia są policzone zgodnie ze wzorami?

4. Szybka kontrola wyniku

Czy wynik można wstawić z powrotem do zadania?
Czy równanie po podstawieniu się zgadza?
Czy granica daje sensowną wartość?
Czy znak wyniku pasuje do oczekiwań?

5. Test punktów kontrolnych

Czy funkcja ma prawidłowy znak w punktach testowych?
Czy pochodna ma prawidłowy znak na wybranych przedziałach?
Czy druga pochodna zmienia znak tam, gdzie ma być punkt przegięcia?
Czy ekstremum rzeczywiście spełnia warunek zmiany znaku pochodnej?

6. Spójność odpowiedzi

Czy końcowy wynik zgadza się z wcześniejszymi krokami?
Czy jednostki, współrzędne i argumenty są zapisane poprawnie?
Czy AI nie pomieszało minimum z maksimum?
Czy nie podało punktu przegięcia tam, gdzie brak zmiany wypukłości?

Dobre praktyki

101 010 011

Rób

Zawsze porównaj wynik AI z rozwiązaniem wykonanym niezależnie.

Wpisuj do promptu efekty uczenia się i ograniczenia czasowe.

Proś o co najmniej 3 alternatywne wersje zadania.

Unikaj

Nie publikuj zadań bez weryfikacji rachunkowej.

Nie oceniaj tylko wyniku końcowego; punktuj kroki.

Nie używaj jednego modelu jako jedyne recenzenta.

Korzyści dla kadry dydaktycznej

101 010 011

Szybsze przygotowanie

jedno polecenie może wygenerować szkic zestawu zadań i rozwiązań

Lepsza standaryzacja

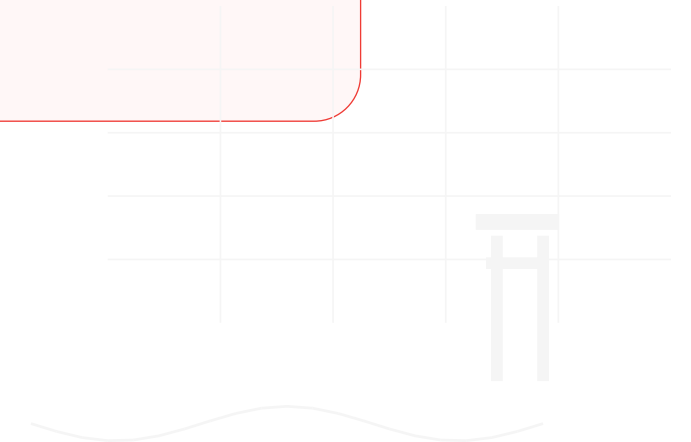
łatwiej utrzymać podobny poziom trudności między grupami

Wsparcie oceniania

punktacja krokowa upraszcza sprawdzanie i ocenianie studentów

Archiwizacja

prompty i kryteria można przechowywać jako powtarzalny workflow



101 010 011



Dziękuję za uwagę!

