

**Zeszyty Naukowe
Wydziału Elektrotechniki i Automatyki
Politechniki Gdańskiej**

78

**INNOWACJE DYDAKTYCZNE
W MATEMATYCE AKADEMICKIEJ
Matematyka 2035: Prognozy i innowacje**

Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki



**Zeszyty Naukowe
Wydziału Elektrotechniki i Automatyki
Politechniki Gdańskiej**

78

**INNOWACJE DYDAKTYCZNE
W MATEMATYCE AKADEMICKIEJ
DIAM 2025**

Matematyka 2035: Prognozy i innowacje

Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki

Wydawnictwo Wydziału Elektrotechniki i Automatyki
Politechniki Gdańskiej

Gdańsk, 2025

ISSN 2353-1290

Adres redakcji:
Politechnika Gdańska
Wydział Elektrotechniki i Automatyki
ul. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk
<https://eia.pg.edu.pl/nauka/zeszyty-naukowe>

REDAKCJA
Dariusz Świsulski

Wydano za zgodą
Dziekana Wydziału Elektrotechniki i Automatyki
Politechniki Gdańskiej
na podstawie materiałów dostarczonych przez autorów

Artykuły po recenzjach zakwalifikował do druku
Komitet Naukowy

Copyright © by Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki

Wydanie 1
Nakład 100 egzemplarzy

**The Scientific Papers of
Faculty of Electrical and Control Engineering
Gdańsk University of Technology**

78

**DIDACTIC INNOVATIONS
IN ACADEMIC MATHEMATICS
DIAM 2025**

Mathematics 2035: Forecasts and Innovations

**Gdańsk University of Technology,
Mathematics Center**

**Published by Faculty of Electrical and Control Engineering
Gdańsk University of Technology**

Gdańsk, 2025

ORGANIZATOR



CENTRUM
MATEMATYKI

PATRON MEDIALNY



Zeszyty Naukowe
WEiA PG

KOMITET PROGRAMOWY DIAM 2025

Przewodnicząca:

dr Anita Dąbrowicz-Tlałka, prof. PG, *Politechnika Gdańska*

Członkowie:

dr Magdalena Musielak, *Politechnika Gdańska*

dr hab. Jacek Stańdo, prof. PŁ, *Politechnika Łódzka*

dr hab. inż. Dariusz Świsulski, prof. PG, *Politechnika Gdańska*

KOMITET NAUKOWY DIAM 2025

Przewodnicząca:

dr Magdalena Musielak, *Politechnika Gdańska*

Członkowie:

dr Anita Dąbrowicz-Tlałka, prof. PG, *Politechnika Gdańska*

dr Dorota Krawczyk-Stańdo, *Politechnika Łódzka*

mgr Katarzyna Kujawska, *Politechnika Gdańska*

dr hab. Jacek Stańdo, prof. PŁ, *Politechnika Łódzka*

dr hab. inż. Dariusz Świsulski, prof. PG, *Politechnika Gdańska*

KOMITET ORGANIZACYJNY DIAM 2025

Przewodnicząca:

Izabela Treder

Członkowie:

Michał Fludra

Marietta Michniewska-Kamińska

Marcin Stępiak

RECENZENCI

dr Anita Dąbrowicz-Tlałka, prof. PG, *Politechnika Gdańska*

dr Dorota Krawczyk-Stańdo, *Politechnika Łódzka*

dr Magdalena Musielak, *Politechnika Gdańska*

dr hab. Jacek Stańdo, prof. PŁ, *Politechnika Łódzka*

dr hab. inż. Dariusz Świsulski, prof. PG, *Politechnika Gdańska*

dr Marcin Wata, *Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

dr Daniel Wójcik, *Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie*

SPIS TREŚCI

Indeks autorów	6
Wstęp	7
1. Dorota Krawczyk-Stańdo Metody aktywizacji studentów na zajęciach z matematyki <i>Methods of activating students in mathematics classes</i>	9
2. Grzegorz Malara, Tomasz Szemberg Integrating AI into linear algebra classes <i>Integracja AI w nauczaniu algebry liniowej</i>	13
3. Magdalena Lampa-Baczyńska, Gregoris Makrides, Daniel Wójcik Constructing mathematical understanding: the relevance of Krygowska's didactics in 21st century STEM classrooms <i>Rozwijanie rozumowania matematycznego: znaczenie dydaktyki Krygowskiej w XXI-wiecznych klasach STEM</i>	17
4. Agnieszka Wałachowska Interdisciplinarity in mathematics education in the context of STEM: a case study of the URANIUM project <i>Interdyscyplinarność w edukacji matematycznej w kontekście STEM: studium przypadku projektu URANIUM</i>	23
5. Magdalena Łapińska, Anna Niewulis Infografika jako narzędzie dydaktyczne. Analiza doświadczeń studentów Politechniki Gdańskiej <i>Infographics as a didactic tool. Analysis of students' experiences at Gdańsk University of Technology</i>	27
6. Małgorzata Zdrodowska, Agnieszka Dardzińska-Głębocka, Anna Kasperczuk Matematyka w dobie sztucznej inteligencji: wyzwania i możliwości dydaktyczne <i>Mathematics in the age of artificial intelligence: challenges and didactic opportunities</i>	31
7. Tomasz Drwięga Od wykładu do doświadczenia – jak przejść od tradycyjnej dydaktyki do modelu learning by doing <i>From lecture to experience: shifting from traditional teaching to a learning-by-doing model</i>	35
8. Anita Dąbrowicz-Tłałka, Magdalena M. Musielak Między kodem a zaufaniem: transformacja dydaktyki matematyki w erze AI na uniwersytetach technicznych <i>Between code and trust: the transformation of mathematics teaching in the age of AI at technical universities</i>	41
9. Katarzyna Kujawska, Anna Niewulis Matematyka akademicka w 2035 roku: wizje studentów i wyzwania współczesnej dydaktyki <i>Academic mathematics in 2035: students' visions and the challenges of contemporary didactics</i>	45

INDEKS AUTORÓW

Agnieszka Dardzińska-Głębocka	31
Anita Dąbrowicz-Tlałka	7, 41
Tomasz Drwięga	35
Anna Kasperczyk	31
Dorota Krawczyk-Stańdo	9
Katarzyna Kujawska	45
Magdalena Lampa-Baczyńska	17
Magdalena Łapińska	27
Gregoris Makrides	17
Grzegorz Malara	13
Magdalena M. Musielak	7, 41
Anna Niewulis	27, 45
Tomasz Szemberg	13
Agnieszka Wałachowska	23
Daniel Wójcik	17
Małgorzata Zdrodowska	31

WSTĘP

Matematyka pozostaje fundamentem współczesnej edukacji akademickiej, a jednocześnie stanowi jedno z najpilniejszych wyzwań dla pedagogów i nauczycieli uniwersyteckich. W dobie szybkiego rozwoju technologii, transformacji cyfrowej i zmian w oczekiwaniach studentów wobec procesu edukacyjnego, konieczne staje się głębokie przemyślenie, jak uczymy matematyki na poziomie studiów wyższych i jakie możliwości niosą ze sobą nowe technologie. Niniejsza publikacja stanowi próbę odpowiedzi na te wyzwania.

Autorami artykułów zawartych w tej publikacji są nauczyciele akademicki i badacze bezpośrednio zaangażowani w nauczanie matematyki na uniwersytetach, praktycy posiadający szerokie doświadczenie zarówno w tradycyjnych formach edukacji, jak i w innowacyjnych rozwiązaniach pedagogicznych.

Współczesna dydaktyka matematyki akademickiej nie może już ograniczać się do transmisji wiedzy. Nowe pokolenia studentów przychodzą na uniwersytety z innym doświadczeniem cyfrowym, innymi sposobami przyswajania informacji oraz rosnącymi oczekiwaniami wobec interaktywności i personalizacji procesu edukacyjnego. Jednocześnie matematyka — mimo całej abstrakcyjności — wymaga głębokich umiejętności krytycznego myślenia, zdolności do samodzielnego rozwiązywania problemów oraz umiejętności komunikowania złożonych idei. To napięcie między nowymi technologiami a fundamentalnymi celami edukacji stanowi źródło tej publikacji.

Zawarte w tej publikacji artykuły skupiają się na kilku kluczowych obszarach. Część z nich dokumentuje i analizuje bieżące praktyki dydaktyczne oraz metody zachęcające studentów do aktywnego uczestnictwa w procesie edukacyjnym. Inne artykuły przyjmują bardziej prognostyczną perspektywę, eksplorując potencjał sztucznej inteligencji, rzeczywistości wirtualnej i rozszerzonej, adaptacyjnych platform edukacyjnych oraz nowych sposobów ewaluacji wiedzy matematycznej. Razem tworzą one krajobraz dydaktyki matematyki — zarówno taki, jakim jest dzisiaj, jak i taki, jakim może kształtować się w przyszłości.

Wśród technologii, które otwierają nowe perspektywy dla edukacji matematycznej, znajdują się systemy wykorzystujące sztuczną inteligencję. Z jednej strony rodzi to obawy, a z drugiej staje się szansą na personalizację ścieżek uczenia się, oraz rozwój narzędzi pozwalających na wizualizację abstrakcyjnych pojęć matematycznych, oraz platform wspierających zespołowe rozwiązywanie problemów. Jednocześnie tradycyjne umiejętności pedagogiczne — empatia, zdolność do rozumienia trudności studentów, umiejętność inspirowania — pozostają niezbędne i nie do zastąpienia. Jest to szczególnie istotne w kontekście edukacji matematycznej, gdzie emocjonalny stosunek do przedmiotu często decyduje o sukcesie lub porażce studenta.

Publikacja „Matematyka 2035: Prognozy i innowacje” kierowana jest zarówno do nauczycieli akademickich poszukujących inspiracji i nowych podejść, jak i do badaczy zainteresowanych dydaktyką matematyki wyższej oraz transformacją edukacji w erze cyfrowej. Stanowi zaproszenie do refleksji nad tym, jak możemy uczynić matematykę bardziej dostępną, angażującą i znaczącą dla studentów, nie tracąc przy tym matematycznego rygoru i głębi, które definiują akademickie studium matematyki.

Wierzimy, że przyszłość edukacji matematycznej na uniwersytetach leży w mądrym połączeniu tradycyjnych wartości matematycznego kształcenia z potencjałem współczesnych technologii.

dr Anita Dąbrowicz-Tlałka, prof. PG
Politechnika Gdańska,
Centrum Matematyki

dr Magdalena Musielak
Politechnika Gdańska,
Centrum Matematyki

METODY AKTYWIZACJI STUDENTÓW NA ZAJĘCIACH Z MATEMATYKI

Dorota KRAWCZYK-STANDO

Politechnika Łódzka, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki
e-mail: dorota.krawczyk-stando@p.lodz.pl

Streszczenie: Nauczyciele akademicy poszukują metod, które aktywizują i motywują studentów do zdobywania wiedzy i umiejętności. W artykule zaprezentowano doświadczenia autorki w zakresie stosowania aktywnych metod nauczania matematyki na inżynierskich, technicznych kierunkach. Przedstawiono wnioski z ankiet przeprowadzonych wśród studentów oraz opinie studentów o zajęciach i realizacji materiału z wykorzystaniem aktywnych metod nauczania. Zajęcia były prowadzone na Wydziale Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej. Łączna liczba studentów, w pracy z którymi wykorzystano metody aktywizujące wynosi 167. Metodami tymi były: studium przypadku, metoda projektu, odwrócona klasa. Stosowanie testów na zdalnej platformie e-learningowej znacząco wpływało na aktywizowanie studentów zarówno na jak i po zajęciach.

Słowa kluczowe: metody aktywizujące, studium przypadku, metoda projektu, odwrócona klasa.

1. AKTYWIZUJĄCE METODY NAUCZANIA

Przygotowując zajęcia, nauczyciel akademicki powinien brać pod uwagę odbiorców zajęć – studentów. Istotne są stosowane metody nauczania oraz stworzenie warunków, umożliwiających studentom aktywne uczestnictwo w procesie nauczania.

Ciągły rozwój, nowoczesność powoduje, że od nauczyciela akademickiego wymagane jest podnoszenie kompetencji oraz doskonalenie swoich umiejętności. Ważne są tu kompetencje dydaktyczne, istotne w stosowanych na zajęciach ze studentami metodach nauczania.

Aby uzyskać jak najlepsze efekty nauczania stosowane są metody aktywizujące studentów. Metody te spełniają funkcje: motywacyjną, poznawczą, kształcącą, dydaktyczną i wychowawczą. Istnieje opinia, że przynoszącą najlepsze efekty zasadą w procesie kształcenia jest zasada aktywnego i świadomego udziału studenta w procesie uczenia się. Wdrażając tą zasadę potrzebne jest zaangażowanie obydwu stron, zarówno studentów jak i wykładowcy. Do osiągnięcia sukcesu niezbędne jest także: wewnętrzne przeświadczenie studentów o zasadności uczenia się i zainteresowanie przekazywaną im wiedzą, uświadomienie celu kształcenia, potrzeba samodzielnego utrwalania przekazywanej w czasie zajęć wiedzy, stwarzanie podczas zajęć warunków do aktywności uczących się.

Badania pokazują, że najczęściej zapamiętujemy wtedy, gdy działamy w zespole i wykonujemy konkretną pracę - stosujemy aktywną naukę poprzez praktykę. Trwale opanowana i przyswojona zostaje ta wiedza i umiejętności, które są rezultatem aktywności własnej. Stają się one

„własnym dorobkiem”, a nie czymś „narzuconym z zewnątrz”.

Metody aktywizujące, oparte są na działaniach umożliwiających aktywne uczenie się, tzn. uczenie się poprzez działanie, poznawanie, odkrywanie i przeżywanie. Metody aktywizujące powodują ciekawość i zwiększają zaangażowanie u studentów. Zajęcia prowadzone tymi metodami są bardziej atrakcyjne i poprawiają skuteczność nauczania. Można je stosować do realizacji części lub całości materiału, podczas całej jednostki zajęć lub w jej części.

Wykładowca stosujący na swoich zajęciach metody aktywizujące staje się „przewodnikiem” pomagającym w odkrywaniu przez studenta wiedzy. Nie „prowadzi za rękę” ale stwarza warunki do myślenia, poszukiwania, doskonalenia, komunikowania się, współpracy w grupie. Pozwala, aby „student studiował” i brał odpowiedzialność za swoje efekty uczenia się.

Metody aktywizujące kształtują umiejętności konieczne nie tylko na zajęciach, ale także w tzw. codziennym życiu:

- logiczne, analityczne i krytyczne myślenie,
- kreatywność, komunikatywność,
- dostrzeganie związków przyczynowo-skutkowych,
- umiejętność odnajdowania się w nowej sytuacji,
- praca w grupie,
- radzenie sobie z porażką,
- czytanie ze zrozumieniem.

Korzyści jakie ze stosowania metod aktywizujących zyskuje student:

- zapamiętuje o wiele więcej niż w tradycyjnej podawczej metodzie,
- uczy się planowania i zarządzania czasem,
- uczy się oceniania efektów własnej nauki,
- rozwija twórcze myślenie i wyobraźnię,
- ćwiczy werbalną i niewerbalną komunikację,
- uczy się wyrażania własnych poglądów i prezentowania własnego punktu widzenia oraz uwzględniania poglądów innych,
- ćwiczy poprawne posługiwanie się językiem,
- uczy się poszukiwać informacje z różnych źródeł i porządkować je,
- uczy się rozwiązywania problemów w sposób twórczy – niestereotypowy,
- uczy się współpracowania w grupie, pełnienia ról, przestrzegania ustalonych zasad,
- łączy i wykorzystuje wiedzę z różnych przedmiotów w praktyce,
- podwyższa swoją samoocenę, widzi efekty swojej pracy,
- buduje motywację do nauki.

Stosując na zajęciach metody aktywizujące kreujemy warunki do wszechstronnego rozwoju studentów [1, 2].

1.1. Testy

Testy online utworzone na uczelnianej platformie e-learningowej sprawdzają wiedzę i umiejętności w sposób podobny jak tradycyjne kolokwia, egzaminy. Testy umożliwiają sprawdzenie stopnia zaawansowania wiedzy oraz umiejętności studentów w zakresie: rozwiązywania zadań, zrozumienia pojęć i metod.

Mogą być stosowane: na zajęciach, jako praca domowa, do samokształcenia studentów. Można tworzyć pytania różnego rodzaju: jednokrotnego wyboru, wielokrotnego wyboru, prawda-fałsz, dopasowanie, zagnieżdżone. Odpowiednio konstruując test możliwe jest sprawdzanie poprawności rozwiązania zadania na kolejnych etapach rozwiązywania. Za wybór poprawnej odpowiedzi przyznawane są punkty dodatnie, a za wybór odpowiedzi niepoprawnej punkty ujemne. Błędne odpowiedzi, przedstawiane w teście do wyboru, są dobierane na podstawie zaobserwowanych, często popełnianych błędów w tradycyjnych kolokwium. Można tworzyć testy zróżnicowane pod względem stopnia trudności. Możliwe jest stworzenie bazy danych zawierającej zadania o podobnym stopniu trudności. Platforma pozwala na losowy wybór zadań, losową kolejność pytań i losową kolejność odpowiedzi w teście dla poszczególnych studentów. Istnieje zatem wiele wariantów tego samego zadania. Tworząc test decydujemy, czy i kiedy będą widoczne dla studenta wyniki testu i ewentualnie poprawne odpowiedzi. Ustalamy także czas dostępności testu oraz dopuszczalną ilość podejść do testu. Uzyskiwana w krótkim czasie informacja zwrotna z punktu widzenia studenta jest bardzo korzystna – wskazuje zagadnienia wymagające poprawy [3].

1.2. Studium przypadku [Case study, Case teaching]

Metoda ta polega na analizowaniu realnego lub hipotetycznego przypadku z praktyki zawodowej, z realnych sytuacji konkretnej branży. Metoda bazując na pracy na konkretnych przypadkach, jest jednym z najskuteczniejszych sposobów uczenia się poprzez doświadczenie.

Stosując case teaching tworzymy w procesie dydaktycznym bezpieczną przestrzeń. Studenci poznają modele oraz konkretne rozwiązania. Mogą bez ponoszenia kosztów doświadczać konsekwencji podjętych przez siebie decyzji. Studenci dokonują ewaluacji zastosowanych rozwiązań, wskazują błędy i zagrożenia, dokonują oceny podjętych decyzji i działań, formułują wnioski do dalszych badań i analiz. Metoda umożliwia analizę realnych sytuacji, zjawisk i działań ludzi. Metoda spełni swoją dydaktyczną funkcję zastosowana zarówno do realizacji wybranej części, jak i całego realizowanego materiału [4], [5].

1.3. Metoda projektów

Metoda polega na pracy indywidualnej lub grupowej studentów nad zaproponowanym tematem w wyznaczonym czasie. Opiera się na praktycznym działaniu dotyczącym realizacji pewnego zdarzenia - projektu. Metoda powoduje wzrost zaangażowania i aktywności. Kształtuje cechy i umiejętności takie jak: zaradność, organizacja warsztatu pracy, zarządzanie czasem, oswojenie z wystąpieniem. Lepiej przygotowuje do codziennego życia niż tradycyjne - podające metody nauczania.

W metodzie wyróżnia się następujące etapy: zapoznanie z ogólnymi zasadami projektu, określenie tematu, wskazanie zadań do wykonania - aby osiągnąć zamierzony cel, ustalenie źródeł informacji, określenie czasu trwania projektu i terminu prezentacji, podział na grupy i wybór osoby koordynującej tworzenie projektu, praca nad projektem, prezentacja i ocena projektu [6, 7].

1.4. Odwrócona klasa [Flipped classroom, Flipped learning]

Metoda odwróconej klasy polega na zamianie schematu zajęć – studenci samodzielnie opanowują zagadnienie przed zajęciami, a na zajęciach praktycznie je utrwalają i ćwiczą pod okiem wykładowcy. Podkreślić należy, że odwrócona klasa nie polega na zamianie ról wykładowca – student, ale właśnie na zmianie schematu zajęć.

Student otrzymuje dostęp do materiałów edukacyjnych i wykorzystując najnowsze technologie zapoznaje się z nimi samodzielnie w dogodnym dla siebie czasie i miejscu. Na zajęcia aktywności proponowane przez wykładowcę wspierają lepsze zrozumienie wcześniej poznanych zagadnień. Studenci zgłębiają wiedzę pracując w grupach lub indywidualnie, mogą prowadzić dyskusje lub pomagać sobie nawzajem. Taki model zajęć angażuje studentów w proces zdobywania wiedzy i umiejętności oraz przygotowuje do samokształcenia [8, 9].

2. METODY AKTYWIZUJĄCE NA ZAJĘCIACH

Metody aktywizujące wykorzystano na zajęciach z Matematyki i Matematyki Finansowej na różnych kierunkach Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej. Do aktywizowania studentów zastosowano: testy na uczelnianej platformie e-learningowej, metody: studium przypadku, projektu, odwróconej klasy.

Zarówno na wykładach jak i ćwiczeniach stosowano testy. Pozwalają one natychmiast po zamknięciu testu uzyskać odpowiedzi na zadane pytanie dotyczące realizowanego zagadnienia. To daje możliwość udzielenia dodatkowych wyjaśnień. Przygotowano także studentom testy do rozwiązywania jako pracę domową, do samokształcenia. Odpowiednio tworząc test mamy możliwość: badania zrozumienia stosowanych metod - proste rachunkowo zadania sprawdzające stopień rozumienia, jak również badanie poziomu zaawansowania - zadania wymagające pomysłowości rachunkowej, badające umiejętności rozwiązywania bardziej złożonych problemów. Różne ustawienia testów pozwalają na zróżnicowaną pracę studentów. Przykładowo możliwe jest wielokrotne rozwiązywanie tego samego testu aż do uzyskania poprawnych odpowiedzi albo jednokrotne rozwiązanie testu i uzyskanie swojego wyniku wraz ze wskazaniem poprawnych odpowiedzi. Istnieje możliwość takiego ustawienia, aby wynik był widoczny natychmiast po rozwiązaniu testu albo dopiero po upływie dostępności testu. Kontrolowana jest informacja zwrotna widoczna dla studenta. Zaletą takich testów jest obiektywność oceny. Wszystkie możliwe do uzyskania warianty pozwalają na różnorodną formę pracy ze studentami w zależności od koncepcji wykładowcy. Więcej o przygotowanych testach [1].

Przykładem zastosowania Case study jest ocena opłacalności inwestycji jakiej dokonywali studenci na zajęciach z Matematyki Finansowej. Studenci pracowali w czteroosobowych grupach. Ich zadaniem było

przygotowanie w wyznaczonym terminie projektu własnej inwestycji wraz z oceną jej opłacalności. Oceny opłacalności dokonywano wykorzystując co najmniej jeden z mierników: NPV (wartość bieżąca netto), IRR (wewnętrzna stopa zwrotu), RRSO (rzeczywista roczna stopa oprocentowania). Studenci wprowadzali zmiany w zaproponowanych początkowo projektach i analizowali jak te zmiany wpływają na opłacalność inwestycji. Przedstawiali harmonogramy spłat planując inwestycję z wykorzystaniem różnych kredytów, np. kredyt z ratami stałymi albo malejącymi, kredyt z wakacjami albo bez wakacji kredytowych. Studenci pracowali z bardzo dużym zaangażowaniem. Podkreślali aspekt wykorzystania zdobytej wiedzy i umiejętności w praktyce. Drobiazgowo zbierali informacje o kosztach jakie będą ponosić, np. czynsz za wynajem lokalu, koszt wyposażenia lokalu, podatki, wynagrodzenia pracowników, ubezpieczenia, koszty używanych produktów, itp. Przewidywali też zyski jakie ich inwestycja miałaby przynosić. Pojawiły się projekty prowadzenia np.: kwiaciarni, kawiarni, firmy transportowej, fotobudki.

Metodę Case study wykorzystano także przy realizacji materiału dotyczącego zastosowania geometrycznego całki oznaczonej. Studenci pracowali w czteroosobowych grupach. Pole powierzchni, długość łuku, pole powierzchni obrotowej, objętość bryły obrotowej były obliczane w sytuacji praktycznego zastosowania do działki rekreacyjnej. Jej ogrodzenie wybudowane było na krzywych o konkretnych równaniach. Obliczano ile kilogramów trawy potrzeba do zasiania na tej działce, szacowano czy podana konkretnie liczba płyt chodnikowych wystarczy do ułożenia ścieżki, szacowano ile co najmniej metrów kwadratowych folii jest konieczne do wyłożenia dna wydrążonego oczka wodnego, obliczano objętość wody w oczku wodnym.

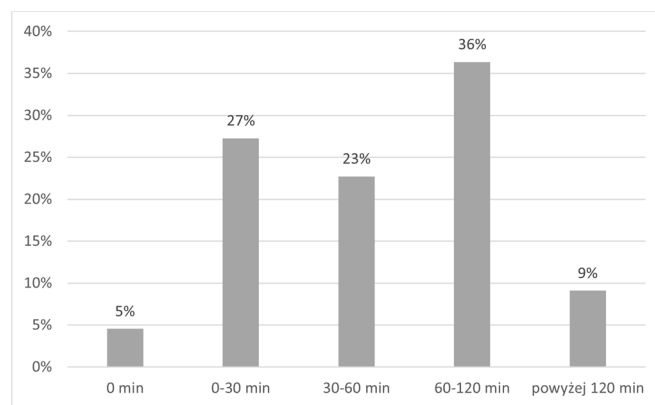
Metodę projektu stosowano przy realizacji materiału dotyczącego krzywych stożkowych i powierzchni stopnia drugiego. Znając wzór powierzchni należało: nazwać powierzchnię, wykonać jej odręczny szkic, wygenerować wykres np. przy pomocy Geogebry, wyznaczyć wzór i nazwać przekrój tej powierzchni z podaną płaszczyzną, wyznaczyć własności otrzymanego przekroju. Istotne było też wskazanie istniejących w rzeczywistości budynków mających kształt rozważanej powierzchni drugiego stopnia, ponieważ nad tymi projektami pracowali studenci Architektury i Planowania Przestrzennego.

Na zajęciach z Matematyki Finansowej realizowano w dwuosobowych grupach projekt polegający na porównaniu różnych kredytów. Studenci mieli za zadanie udać się do banku, przeprowadzić rozmowę z pracownikiem banku i uzyskać jak najwięcej informacji o oferowanych kredytach i ich różnych wariantach: raty stałe, malejące, wakacje kredytowe, itp. Należało przeanalizować całkowity koszt udzielanego kredytu, w tym prowizję, ubezpieczenia, itp. Istotne było przeanalizowanie „za i przeciw” różnych wariantów kredytu udzielonego w tej samej kwocie, walucie i na ten sam okres. Realizujący projekt studenci byli zadowoleni z faktu zdobycia praktycznego doświadczenia w rzeczywistej sytuacji.

Ze względu na rosnące zainteresowanie metodą odwróconej klasy - postanowiono zebrać opinie studentów o tej metodzie i przeprowadzono ankiety. Metodę odwróconej klasy stosowano na ćwiczeniach w trzech grupach studenckich na dwóch różnych kierunkach. Łącznie w zajęciach uczestniczyło 68 osób. W każdej z tych grup zrealizowane zostały dwa tematy: ciągłości funkcji w punkcie i zbieżności szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich.

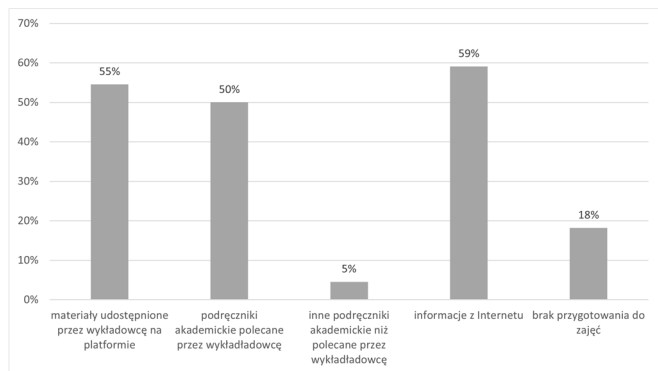
Dwa tygodnie przed wyznaczonym terminem zajęć studenci otrzymali dostęp do umieszczonych na uczelnianej platformie e-learningowej przygotowanych materiałów. Była tam również wskazana literatura. Studenci zostali także poinformowani na czym polega metoda odwróconej klasy, jak będą wyglądały przeprowadzone tą metodą zajęcia oraz na co mają zwrócić uwagę przygotowując się samodzielnie do zajęć. Istniała też możliwość skorzystania z pomocy wykładowcy na Teams. Na platformie były także dostępne testy, które umożliwiały sprawdzenie samodzielnie zdobytej wiedzy i umiejętności. Podczas zajęć losowo podzielono studentów na pięcioosobowe grupy. Każda grupa rozwiązywała wspólnie kilka przygotowanych przykładów. Następnie przedstawiciel grupy prezentował i tłumaczył wszystkim uczestnikom zajęć rozwiązanie. Do tłumaczenia włączały się także inne osoby. Studenci zadawali sobie nawzajem pytania i oczekiwali bardziej precyzyjnych wyjaśnień. Zajęcia przebiegały w sposób dynamiczny i bardzo aktywizowały studentów. Cenili oni urozmaicenie zajęć, aktywną formę, możliwość współpracy w grupie.

Po zakończeniu zajęć ich uczestnicy wypełnili ankiety. Poniżej przedstawiono wyniki tych ankiet. Studenci zwracali uwagę na fakt, że pracując metodą odwróconej klasy trzeba przeznaczyć dużo czasu na samodzielne przygotowanie się do zajęć (rys. 1).

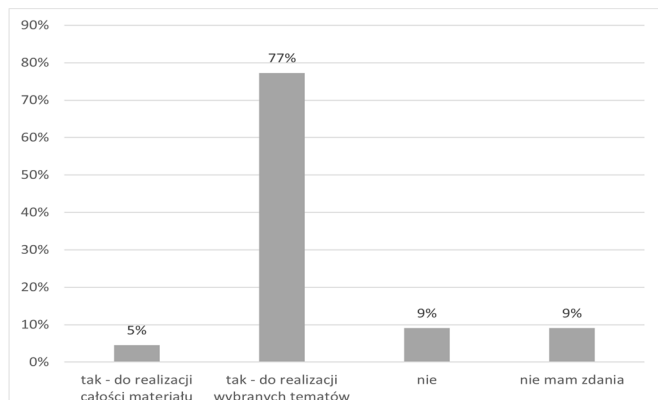


Rys. 1. Czas przeznaczony na przygotowanie się do zajęć realizowanych metodą odwróconej klasy

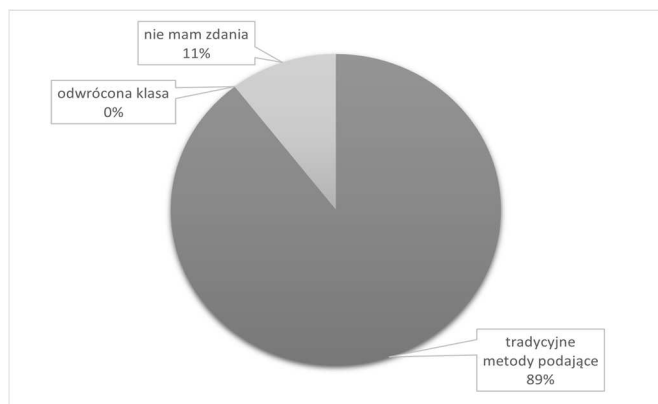
Przygotowując się do zajęć studenci najchętniej korzystali z materiałów udostępnionych i poleconych przez wykładowcę oraz znalezionych w Internecie. Nasuwa się tu pytanie, czy materiały znalezione w Internecie były wiarygodne, zrecenzowane i nie zawierały błędów? Były też nieliczne osoby, które nie przygotowały się do zajęć, co rzutowało oczywiście na pracę na zajęciach (rys. 2). Większość studentów chce stosowania metody odwróconej klasy do pewnych wybranych tematów (rys. 3). Zauważono na podstawie ankiety, że zarówno wśród zwolenników jak i przeciwników stosowania metody odwróconej klasy na zajęciach z matematyki były osoby ze słabym jak i bardzo dobrym wynikiem z matury rozszerzonej z matematyki. Temat ten powinien być pogłębiony w kolejnych badaniach. Z ankiety wynika także, że studenci jako preferowane metody prowadzenia zajęć wskazują tradycyjne metody podające (rys. 4).



Rys. 2. Materiały wykorzystywane do przygotowania się do zajęć realizowanych metodą odwróconej klasy



Rys. 3. Stosowanie metody odwróconej klasy na zajęciach z matematyki



Rys. 4. Metoda nauczania zastosowana do realizacji całości materiału

3. WNIOSKI KOŃCOWE

- Metody aktywizujące powinny być stosowane w procesie kształcenia.
- Stosowanie metod aktywizujących w procesie nauczania przygotowuje studentów do samokształcenia w dalszym, dorosłym życiu.
- W opinii studentów metody aktywizujące są czasochłonne, zatem powinny być stosowane tylko do wybranych zagadnień.

4. BIBLIOGRAFIA

1. Szewczuk K., Sposoby aktywizowania studentów podejmowane przez nauczycieli akademickich, [w:] Współczesne wyzwania dydaktyki szkoły wyższej, A. Domagała-Kręcioch (red.), O. Wyżga, Kraków 2009.
2. Syguła- Iwaniuk M., Metody aktywizujące uczniów <https://archiwum.sp50.bialystok.pl>, data dostępu 31.08.2024.
3. Galewska E., Krawczyk-Stańdo D., O testach z matematyki na zdalnej platformie, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, Nr72, s. 37-41, 2021.
4. Zelek A., Case study – nieocenione narzędzie dydaktyczne, Zachodniopomorska Szkoła Biznesu w Szczecinie, Około Pedagogii, Szczecin, Nr 2, s. 66-79, 2021.
5. Anderson E., Schiano B., Teaching with Cases: A Practical Guide, Harvard Business Review, 2014.
6. Kotarba-Kańczugowska, Praca metodą projektu, Ośrodek Rozwoju Edukacji https://ore.edu.pl/wp-content/uploads/phocadownload/pracownie/praca_meto_da_projektu.pdf, data dostępu 31.08.2024.
7. Gołębiak B. D., Uczenie metodą projektów, Wydawnictwo WSiP, 2002.
8. Gerstein J., Flipped Classroom: The Full Picture for Higher Education, <https://usergeneratededucation.wordpress.com/2012/05/15/flipped-classroom-the-full-picture-for-higher-education/>, data dostępu 31.08.2024.
9. Olszewska J., Metoda „odwróconej klasy” – nowy sposób na lekcję, Szkoła. Miesięcznik dyrektorów, sierpień 2018.

METHODS OF ACTIVATING STUDENTS IN MATHEMATICS CLASSES

Academics are looking for methods that activate and motivate students to acquire knowledge and skills. This article presents the author's experience of using activating methods to teach mathematics in engineering, technical faculties. Conclusions from student surveys are presented, as well as students' opinions about classes and the realisation of the material with the use of activating teaching methods. The classes were conducted at the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Environmental Engineering of the Technical University of Łódź. The total number of students to whom activation methods were applied was 178. These methods included: case study, project method, flipped classroom. The use of tests on a remote e-learning platform significantly influenced the activation of students both during and after classes.

Keywords: activating methods, case study, project method, flipped classroom.

INTEGRATING AI INTO LINEAR ALGEBRA CLASSES

Grzegorz MALARA¹, Tomasz SZEMBERG²

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Instytut Matematyki
tel.: 12 6626274

1. e-mail: grzegorz.malara@uken.krakow.pl
2. e-mail: tomasz.szemberg@uken.krakow.pl

Abstract: This paper discusses the integration of generative AI into Linear Algebra teaching at the university level. We distinguish between the needs of mathematics majors, who benefit from AI as a scaffold for abstraction and proof, and engineering students, for whom AI supports modeling and computation. Examples illustrate how tasks can be redesigned to promote interpretation rather than rote calculation. Challenges and risks such as hallucinated proofs, plagiarism, or passivity are discussed. We conclude with recommendations for assessment practices and practical suggestions for embedding AI in undergraduate courses. The proposed approach redefines the role of manual computation and points to a future where AI is an enabler of deeper mathematical understanding.

Keywords: Artificial Intelligence, Linear Algebra, Higher Education, Assessment.

1. INTRODUCTION

Over the last couple of years, the exponential growth of large language models (LLMs) has sparked widespread debate about their role in education, particularly in higher education. Much of this debate has centered on risks and challenges [1, 2] from plagiarism and academic integrity to passivity and shallow learning. While these concerns are real, especially if AI is used without carefully designed pedagogy, it is equally important to recognize the opportunities. In this paper we focus on the integration of AI into routine teaching, with Linear Algebra serving as a paradigmatic example.

AI chatbots such as ChatGPT are primarily designed to provide information, not to promote learning. They do not natively follow best practices from educational psychology, such as scaffolding active learning, managing cognitive load, or encouraging a growth mindset. Nevertheless, with thoughtful instructional design, these tools can be redirected toward fostering engagement and deeper conceptual understanding. For a broad survey of ChatGPT in mathematics education see [3]; for concrete applications in linear algebra see [4], and for practical implementations see [5].

For much of the twentieth century, courses in Linear Algebra relied heavily on manual computation as evidence of mastery. Tasks such as “compute the rank of a 5×5 matrix by row reduction” functioned both as practice and as summative assessment, reflecting the limited availability of computational tools. In the present landscape, however, such exercises no longer serve as meaningful targets. Modern software environments, including LLM-based systems, can

instantly perform standard procedures such as rank computations, eigenvalue extraction, or factorizations, often at scales far beyond what students could manage by hand. In fact, entire homework sets can now be solved on demand. A landmark demonstration by Drori and Verma [6] showed that OpenAI Codex could solve complete question sets from MIT and Columbia linear algebra courses by synthesizing runnable code. It was even able to generate new problems, further illustrating why “compute-by-hand” tasks are no longer reliable indicators of understanding. Similar points have been made by Corless, Jeffrey, and Shakoori [7], who emphasize the pedagogical advantages of “mechanized mathematical environments.”

This shift creates an opportunity. Time previously spent teaching and grading lengthy manipulations can now be redirected toward higher-order objectives such as conceptual understanding, modeling, and interpretation. The role of hand computation should therefore be redefined. Rather than being treated as an end in itself, manual calculation can serve as a formative tool: carefully chosen small-scale examples can illustrate why rank corresponds to the number of pivots, why determinant zero signals singularity, or how pivot columns form a basis for the column space. Limited manual practice helps build intuition and forms a bridge to abstraction, while more complex or large-scale problems are delegated to AI or CAS systems [8].

In this way, Linear Algebra classes can move beyond routine exercises toward environments where students critically engage with both the mathematics and the tools that now pervade its practice.

2. AI IN TEACHING LINEAR ALGEBRA

Linear Algebra occupies a central position in undergraduate curricula across many disciplines. Yet the learning goals differ significantly: for mathematics majors it represents the first structured encounter with abstract reasoning and formal proofs, while for engineering students it is a computational language for modeling and solving applied problems. Any integration of AI must therefore respect these distinct purposes, while addressing the common challenge of ensuring that students remain active participants rather than passive consumers of machine output.

3. MATHEMATICS MAJORS: AI AS A SCAFFOLD FOR ABSTRACTION AND PROOF

For mathematics majors, Linear Algebra serves as a training ground for abstraction. It introduces vector spaces, linear maps, and proofs as a mode of reasoning. Here, AI can become a scaffold rather than a substitute: offering alternative proofs, analogies, or geometric visualizations that students must evaluate critically [8]. Such interaction promotes metacognition, requiring students to check whether machine-generated reasoning adheres to logical rigor.

A useful example is the following parameterized matrix:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Students are asked to:

1. Determine $\text{rank}(A(t))$, for all $t \in \mathbb{R}$.
2. Provide a basis for $\text{Im}(A(t))$ and $\text{ker}(A(t))$.
3. Prove their answers without resorting to full Gaussian elimination, using instead invariants and selective row or column operations.

This task is simple enough to invite AI-generated suggestions, yet rich enough to require human interpretation and rigorous justification. Students may use AI or CAS to check specific values of t , but the essential learning outcome is a conceptual proof strategy. Other exercises can invite students to critique AI's proofs of standard results (e.g. why the determinant of a product equals the product of determinants), asking them to identify gaps or errors. Such activities transform AI from a shortcut into a mirror of students' own reasoning.

4. ENGINEERING STUDENTS: AI AS A TOOL FOR MODELING AND COMPUTATION

For engineering students, Linear Algebra is primarily a language of models. They do not benefit from formal proofs in the same way; rather, they need to translate physical or computational systems into algebraic form. Here, AI naturally complements the curriculum: generating MATLAB or Python code, simulating systems, or producing visualizations [6].

A concrete illustration arises from the incidence matrix of a simple electrical network:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Students are asked to:

1. Compute the rank of A .

2. Interpret the nullspace in terms of possible current flows.
3. Analyze how rank and connectivity change if one edge (column) is removed.
4. Use CAS or AI to confirm calculations and provide code/output as part of the solution.

This exercise design reflects authentic engineering practice: AI carries the computational load, while students interpret what the rank and nullspace mean in terms of reliability and redundancy. The exercise develops both technical fluency and modeling skills.

Additional opportunities include AI-assisted visualization of eigenvalues and modes in structural engineering, or the use of singular value decomposition for data compression. In all cases, AI supports scale and realism: allowing tasks that would be prohibitively complex by hand, but deeply instructive when interpreted.

5. CHALLENGES AND RISKS

The integration of AI into Linear Algebra teaching is not free of difficulties. While generative models can accelerate computation and provide explanations, they also introduce pedagogical, technical, and ethical risks that instructors must anticipate.

Pedagogical risks. Perhaps the most immediate concern is student passivity. If learners treat AI as an oracle delivering answers, they may abandon productive struggle, which is crucial for developing problem-solving resilience. Overreliance on machine output can hinder the cultivation of critical habits of mind-questioning assumptions, testing edge cases, or reflecting on reasoning. Moreover, generative models are prone to hallucinations, producing proofs or explanations that appear coherent but are mathematically incorrect [1, 2]. Without explicit guidance, students may lack the skills to detect such errors.

Technical risks. Linear Algebra is often taught as a gateway to numerical computation. Yet AI-generated code may ignore numerical stability or conditioning issues that are central in practice. For instance, a system with nearly dependent rows may yield wildly different numerical solutions depending on algorithmic choices. If students outsource all computation to AI, they risk overlooking such subtleties. Similarly, AI may default to symbolic approaches where numerical ones are more appropriate, reinforcing misconceptions about the nature of applied computation.

Ethical and institutional risks. The accessibility of generative tools raises concerns about plagiarism, fairness, and equity of access. Some students may have unrestricted use of advanced AI platforms, while others rely only on free versions. This asymmetry can exacerbate inequalities. Institutions also face the challenge of aligning AI use with academic integrity policies, which often lag behind technological developments.

Mitigation strategies. These risks do not imply that AI should be excluded from the classroom. Instead, they highlight the need for structured integration. Instructors should design activities where AI plays a supportive, not substitutive, role: checking computations, offering alternative perspectives, or serving as a source of flawed reasoning that students must critique. Guardrails such as oral defenses, annotated AI outputs, or collaborative discussions can ensure that students remain active agents. In this way, the risks become opportunities for teaching critical AI

literacy, the ability to use these tools effectively, responsibly, and reflectively [9].

6. ASSESSMENT

One of the most frequently raised concerns about allowing AI into the classroom is how to evaluate student learning. Traditional, computation-oriented exercises are no longer sufficient in an environment where standard tasks can be automated. A meaningful assessment strategy must instead emphasize interpretation, reasoning, and communication.

For students of mathematics, assessment should focus on their ability to engage critically with abstraction and proof. Possible tasks include:

- analyzing AI-generated proofs for correctness and completeness,
- defending AI-assisted reasoning in oral examinations,
- extending classical concepts such as canonical forms or dual spaces to novel contexts.

These activities preserve rigor while also teaching students to treat AI as a fallible collaborator whose output demands scrutiny. For instance, students might be asked to annotate a flawed AI proof, pointing out where logical steps break down and how to repair them. This blends traditional proof skills with modern critical AI literacy.

For engineering cohorts, authentic, application-driven tasks provide the best assessment opportunities. Students can be evaluated through projects such as:

- analyzing the stability of a control system using eigenvalue methods,
- modeling networks with adjacency or incidence matrices,
- applying singular value decomposition to compress or filter real datasets.

Here, AI handles computational overhead, but grades are based on problem formulation, interpretation of results, and the clarity of conclusions [4]. For example, a Jupyter notebook project may contain AI-generated code, but students must demonstrate understanding by explaining parameter choices, diagnosing numerical issues, and interpreting visualizations.

A balanced assessment strategy combines multiple components: short in-class exercises for fluency, AI-supported homework for exploration, oral examinations for defense of reasoning, and project reports for synthesis. One possible distribution could be 20% oral exam, 30% AI-assisted project, and 50% problem sets with CAS or AI verification. Such hybrid approaches ensure that students practice both manual and conceptual skills while demonstrating their ability to use computational tools responsibly.

Across both groups, the guiding principle remains the same: assessment should measure not the execution of procedures, but the interpretation of mathematical meaning. Whether critiquing an AI-generated proof or analyzing the eigenstructure of a real system, students are evaluated on their reasoning, not on their ability to reproduce calculations that machines can already perform.

7. CONCLUSION

When used without structure, generative AI can harm learning: it may encourage copy-paste behavior, superficial engagement, and uncritical acceptance of machine output.

Yet when carefully embedded into pedagogy aligned with principles of active learning, AI has the potential to enhance student engagement, deepen conceptual understanding, and extend the scope of classroom activities [9].

In the context of Linear Algebra, AI enables a fundamental reorientation of educational priorities:

- For mathematics majors, AI can serve as a scaffold for rigor and abstraction, supporting proof, metacognition, and critical reasoning.
- For engineering students, AI can act as a partner in modeling and computation, allowing them to focus on interpretation, design choices, and system reliability.

Rather than displacing traditional skills, AI compels instructors to reconsider what kinds of manual work are still pedagogically valuable. Carefully chosen examples of hand computation can continue to build intuition, but larger or more complex problems should be delegated to computational environments.

From a practical standpoint, we recommend structured integration of AI through:

1. Selected modules or assignments; for example, one or two AI-supported projects per semester, explicitly designed to combine machine output with human interpretation.
2. Hybrid assessment formats; blending written, oral, and AI-assisted components, ensuring that students are rewarded for reasoning and communication, not for typing prompts.
3. Critical AI literacy training; helping students to question, verify, and refine AI output, treating it as a tool to be interrogated rather than a source of truth.

Finally, AI compels us to rethink what it means to “do mathematics” in higher education. Just as calculators and CAS systems once shifted the boundary of what counted as routine work, today’s generative models shift it further. The challenge for educators is not to resist this change, but to harness it; turning AI from a threat into a catalyst for deeper, more meaningful mathematical learning.

8. BIBLIOGRAPHY

1. Lodge, J., (2024). The evolving risk to academic integrity posed by generative artificial intelligence. TEQSA.
2. Hamman, K., Karaali, G., Ludwig, L., (2025). Who’s Afraid of Generative AI? Ethical Considerations for Mathematics Instructors. Notices of the AMS 72.
3. Pepin, B., Buchholtz, N., Salinas-Hernández, U. (2025). A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education. Digit Exp Math Educ 11.
4. Hu, J., and Sui, G., (2024). Application of Generative Artificial Intelligence in Linear Algebra Teaching. Proc. ISEMSS 2024.
5. The Linear Algebra Game, version 1.0.0, https://stavan-jain.github.io/linear_algebra_game/
6. Drori, I., Verma, N., (2021). Solving Linear Algebra by Program Synthesis. Preprint arXiv:2111.08171.
7. Corless, R. M., Jeffrey, D. J., & Shakoori, A., (2023). Teaching Linear Algebra in a Mechanized Mathematical Environment. Preprint arXiv:2306.00104.
8. Dydak, J., (2024). Artificial Intelligence to Assist Problem Solving in Linear Algebra. ResearchGate preprint.

9. Kestin, G., Miller, K., Klaes, A. et al. (2025). AI tutoring outperforms in-class active learning. Sci Rep 15, 17458.

INTEGRACJA AI W NAUCZANIU ALGEBRY LINIOWEJ

W artykule przedstawiono propozycje wykorzystania sztucznej inteligencji w dydaktyce algebry liniowej na poziomie akademickim. Rozróznilo potrzeby studentów matematyki (abstrakcja, dowód) i studentów kierunków inżynierskich (modelowanie, obliczenia). Omówiono ryzyka (halucynacje, plagiat, bierność) oraz sposoby oceny pracy studentów. Zaproponowano praktyczne scenariusze wdrożenia AI, które redefiniują rolę obliczeń ręcznych i pozwalają traktować AI jako narzędzie wspierające rozwój głębszego rozumienia matematyki.

Słowa kluczowe: sztuczna inteligencja, algebra liniowa, dydaktyka, ocena.

CONSTRUCTING MATHEMATICAL UNDERSTANDING: THE RELEVANCE OF KRYGOWSKA'S DIDACTICS IN 21ST CENTURY STEM CLASSROOMS

Magdalena LAMPA-BACZYŃSKA¹, Gregoris MAKRIDES², Daniel WÓJCIK³

1. Uniwersytet im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Instytut Matematyki
tel.: 12 662-62-91 e-mail: magdalena.lampa-baczynska@uken.krakow.pl
2. Uniwersytet im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Instytut Matematyki
tel.: 12 662-62-96 e-mail: gregoris.makrides@uken.krakow.pl
3. Uniwersytet im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Instytut Matematyki
tel.: 12 662-62-86 e-mail: daniel.wojcik@uken.krakow.pl

Abstract: This article examines the connections between Anna Zofia Krygowska's theory of didactic situations and contemporary STEM education. By revisiting her activity-based approach to mathematics learning, we show how her concepts align with modern interdisciplinary, inquiry-driven STEM pedagogies. The paper traces a progression from structured mathematical activities to open-ended STEM projects, emphasizing shared principles such as real-world problem solving, student agency, and the teacher's role as a learning environment designer. We argue that Krygowska's legacy offers a valuable theoretical foundation for STEM education, and we reflect on its implications for curriculum design and teacher development.

Keywords: activity-based learning, STEM education, didactic situations.

1. FROM ACTIVITY-BASED LEARNING TO STEM: TRACING PEDAGOGICAL CONTINUITY

Contemporary STEM education is seen as a response to modern social and technological challenges. However, its foundations – interdisciplinary problem solving, active learning and progressive abstraction – have deep roots. One of the most important precursors of STEM thinking in mathematics education was Anna Zofia Krygowska, a Polish educator who developed a teaching model based on activity, psychological and epistemological insights. Krygowska emphasised that students learn mathematics best when they actively construct knowledge through structured situations. 'Activity-based mathematics teaching is a didactic procedure that takes into account the operational nature of mathematics, moving from concrete and representative activities to abstract operations.' — An outline of mathematics teaching Her approach placed the student at the centre of the learning process as a problem solver. In her opinion, learning was not reproduction, but invention: 'Learning mathematics is an organised activity that involves the direct use of information to solve tasks and create subjectively new concepts, theorems and methods in the process of problem solving.' [1]. This vision is similar to the views of constructivists such as Jean Piaget, who claimed that 'to understand is to invent,' and Jerome Bruner, whose theory of representation — enactive, iconic, symbolic [3] — reflects Krygowska's stages of abstraction. Furthermore, Krygowska envisioned a broader goal for mathematics education: 'Today, we want not only to

teach mathematics, but also to educate through mathematics.' This perspective is reflected in STEM's emphasis on using mathematics as a tool for developing critical thinking, modelling skills and interdisciplinary reasoning. In this sense, STEM education can be seen as a continuation of earlier traditions of activity-based and cognitively rich learning.

2. MATHEMATICAL THINKING AS AN ACTIVITY: HISTORICAL FOUNDATIONS AND CONTEMPORARY APPLICATIONS

The principle that understanding stems from deliberate, goal-oriented action, which forms the basis of most contemporary STEM pedagogy, was formulated over half a century ago by Krygowska. Her work anticipated the constructivist approach, placing 'student action at the centre' of the learning process and advocating for 'didactic situations' that force students to think, manipulate and reflect. 'For mathematical knowledge to be truly assimilated, it must result from the student's own mental activity – stimulated, of course, by well-constructed didactic situations.' — 'An Outline of Mathematics Teaching,' [1]. The emphasis on learning through activity is consistent with Piaget's constructivism and contemporary inquiry-based approaches. In contemporary STEM education, students explore concepts through hands-on projects, simulations, and interdisciplinary problem-solving, often working collaboratively. These practices reflect what Krygowska called 'activity-based teaching' — where understanding is "constructed" rather than 'transmitted.' 'Mathematics is not learned by listening, but by doing and thinking.' [1]. Contemporary researchers share Krygowska's view. Alan Schoenfeld [4] defines mathematical proficiency as 'productive struggle in a well-organised environment', while Jo Boaler [5] argues that real mathematics is created in the process of solving complex, unknown problems. The NCTM publication 'Principles to Actions' [7] emphasises student engagement in reasoning, justification and modelling as fundamental principles of high-quality mathematics teaching. In addition, the OECD publication 'Learning Framework 2030' [8] emphasises agency and co-agency, highlighting the role of the student as an active participant in shaping knowledge through collaboration and problem

solving. These formulations reflect Krygowska's view of the student as a cognitive subject. In the STEM model, the learning environment is designed to arouse curiosity and require action, fulfilling Krygowska's postulate regarding lessons that require intellectual effort, contextual reasoning and creative solution construction. 'A lesson should be a process of discovering structures, not memorising formulas'. Another enduring insight from Krygowska is her vision of the teacher as a designer of learning environments — a role that today's STEM teachers increasingly have to play, acting as architects of experiences, setting challenges, guiding questions and offering tailored support. 'The teacher is not the source of truth, but the creator of conditions in which truth becomes accessible' — Krygowska (paraphrase). This is consistent with current concepts such as productive failure (Kapur, 2008 [19]) and ambitious teaching.

3. FROM DIDACTIC SITUATIONS TO INTEGRATED STEM PROJECTS: DESIGNING FOR CONCEPTUAL GROWTH

One of Krygowska's innovations was the concept of a teaching situation – a deliberately constructed educational space in which mathematical ideas could emerge from students' engagement in solving structured problems, material representations and real-life contexts. 'A didactic situation is not merely an opportunity to apply familiar procedures; it must stimulate the student to construct new knowledge through reflective action.' [1]. This concept anticipates the contemporary approach to curriculum design in STEM education, where authentic problems, interdisciplinary connections and student activity play a central role. Both approaches reject the idea of mathematics as a static body of knowledge transmitted by the teacher. Instead, they emphasise conditions in which students actively construct meaning, often collaboratively and through exploration. Krygowska proposed that effective teaching situations should exhibit several key features: cognitive demands, meaningful context, openness, and progressive abstraction. These features are not just a historical curiosity – they correspond directly to what we now recognise as high-quality STEM tasks. For example, the 5E (Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluate) teaching model, widely used in STEM curricula, is based on a similar pedagogical logic: it starts with curiosity and concrete experiences, moves on to conceptual generalisations, and ends with reflection through application. In modern classrooms, Krygowska's teaching situations find their counterparts in project-based learning (PBL) and integrated STEM project challenges. A well-designed STEM project reflects its structure: it starts with a rich, often real-world problem, provides students with materials and tools, and supports them in creating solutions through guided discovery. The teacher's role is to support, ask questions and structure — not to provide answers. 'Knowledge does not result from the transfer of information, but from the learner's reflection on experience in a well-organised environment.' [1]. Recent research on the design of mathematical tasks confirms the validity of Krygowska's theory. Tasks that promote mathematical reasoning, strategic competence and productive struggle are preferred over procedural exercises. This is evident in mathematical modelling frameworks (e.g. COMAP, 2020 [12]), design thinking cycles, competency-based assessment systems that reward adaptive thinking, collaboration and knowledge transfer — all characteristics of Krygowska's theory.

In such environments, students learn mathematics in order to use it – to solve important problems. This is consistent with Krygowska's emphasis on usefulness, purposefulness and action in mathematics teaching. 'Mathematics must be seen as a tool for interpreting and shaping reality, not just as a system of formal operations.' [1]. Both Krygowska's and STEM's approaches emphasise openness and student activity; neither promotes randomness or unstructured exploration. On the contrary, effective teaching situations — and effective STEM projects — require precise design. They must be carefully crafted to elicit specific cognitive processes and lead to generalised conclusions. Structure and creativity are therefore not opposites. As in Krygowska's vision, they reinforce each other.

4. FROM CONCRETE MANIPULATION TO INTERDISCIPLINARY DESIGN: CLASSROOM PRACTICES BRIDGING CONSTRUCTIVIST DIDACTICS AND STEM

Transferring constructivist teaching to everyday school practice is not a simple process of applying theory, but a continuous effort to reimagine how students acquire knowledge. Krygowska was convinced that 'true understanding occurs when students actively participate in constructing meaning through interaction with materials, ideas, and peers' [1]. The emphasis on active, experience-based learning is a fundamental principle that is reflected in contemporary STEM education. By analysing specific classroom practices, we can observe how traditional mathematical concepts can be transformed into interdisciplinary educational experiences. In such environments, students not only acquire knowledge, but also engage in real-world problem solving, design thinking, and inquiry. One effective approach to teaching mathematics—based on Krygowska's belief in the educational role of manipulation and experimentation—is experiential learning. This type of activity is a microcosm of STEM thinking. Error becomes part of discovery, which is a central principle of both constructivist and design-based approaches to learning. It embodies what Seymour Papert later described as constructivism, where learning occurs 'particularly well when the learner is engaged in constructing something that others can see' [16]. Although Krygowska did not use the same terminology, her work anticipated many of these ideas by decades.

Geometry often becomes abstract and detached from real-life experiences. Krygowska criticised this abstraction: 'The teaching of geometry must be based on real spatial experiences, not just definitions and theorems' [1]. Geometry classes focused on designing a model neighbourhood can counteract this discrepancy. Students work in teams, simulating an urban layout, designing roads, intersections, building plots and green areas. While calculating angles, area and symmetry, they also discuss traffic intensity, the direction of sunlight and the location of schools or parks. The tools include both physical aids (cardboard, compasses, rulers) and computer software. Mathematical thinking is inextricably linked here with spatial reasoning, environmental awareness and civic imagination. Geometry is no longer a separate discipline, but an essential language for solving problems in complex human-centred systems. This is the essence of STEM education: solving real-world problems using integrated knowledge.

Moving on to more advanced integration, a class project involving the design and implementation of an automatic irrigation system provides the ideal context for applying mathematical reasoning within STEM. Students measure the area of garden plots, calculate water requirements based on plant type, estimate tank capacity, and work with sensors and microcontrollers to create a programmable irrigation schedule. This task is mathematically rich (requiring unit conversion, proportion, and estimation) but also deeply interdisciplinary: biology, computer science, and engineering come together to solve a meaningful problem. Furthermore, such projects are consistent with the authentic learning environments defined by Herrington and Oliver [17], which emphasise complex, long-term tasks embedded in a real-world context.

Students can engage in STEM projects focused on sustainability that involve higher-level mathematical modelling. One interesting example is the design of a small water turbine to generate electricity. Using recycled materials, they experiment with turbine blade shapes, water pressure and rotation angle. They collect data, calculate averages and ratios, present the results in graphs, and consider how to improve efficiency. This context requires knowledge of geometry, physics, algebra, and data science, but also creativity, teamwork, and iteration. Krygowska emphasised the importance of combining action and formalisation, arguing that: 'The real task of teaching mathematics is to lead the student from a concrete activity to an abstract formulation and then back to application' [1]. These words are particularly true in relation to STEM. Projects such as this one show that mathematical modelling becomes not only a cognitive exercise but also a tool for tackling complex global challenges such as renewable energy.

The combination of student-centred teaching and project-based STEM education paves the way for a more holistic, dynamic and socially relevant model of mathematics teaching.

5. TENSIONS AND TRANSITIONS: PREPARING FUTURE TEACHERS FOR STEM THROUGH THE LENS OF CONSTRUCTIVIST DIDACTICS

Combining Krygowska's pedagogical vision with the demands of modern STEM education creates both transformative opportunities and significant challenges, particularly in the area of teacher preparation. Although both paradigms advocate for student-centered, activity-based learning, their sources, emphases, and institutional contexts differ. This requires more than simply an exposure to innovative methods—it requires a profound shift in professional identity, epistemological beliefs, and pedagogical imagination.

Krygowska consistently emphasized that teachers are not merely carriers of content but designers of learning situations that encourage student exploration, manipulation, and reflection: "The teacher's task is to create situations in which the child can act, observe, formulate, and generalize" [1]. This conceptualization is closely linked to the teacher's role in STEM classrooms, particularly in project-based learning (PBL), where educators serve as facilitators, mentors, and co-researchers. However, many teachers—especially those trained in transmission-oriented models—find this role shift challenging. It requires relinquishing control, accepting uncertainty, and tolerating the ambiguity inherent in open-ended, interdisciplinary tasks. Furthermore,

while constructivist pedagogy emphasizes carefully structured sequences of activities within a single discipline, STEM education requires integration across disciplines, often without clear disciplinary boundaries. Teachers must therefore develop both deep content knowledge and pedagogical proficiency in mathematics, science, technology, and engineering.

The central tension lies in the epistemological foundations of both paradigms. Krygowska's work remains grounded in mathematical rigor and a careful shift from action to abstraction, emphasizing the formal structures of mathematical thinking. In contrast, STEM education—especially in its more applied or design-oriented forms—may prioritize functionality, innovation, and practical application over formal proofs or logical coherence. This raises important questions for teachers:

How can teachers ensure that mathematical depth is not sacrificed in STEM projects?

How can constructivist theory help students deepen their subject knowledge, even in interdisciplinary contexts?

Research suggests that integrated approaches do not automatically lead to deeper conceptual learning [18], especially if core content is treated superficially. Teachers need strategies to weave formal reasoning into applied contexts, transforming projects not as deviations from the curriculum but as vehicles for subject knowledge.

Teacher education programs often reflect the fragmented structure of the education system: mathematics is taught by mathematicians, physics by physicists, and engineering by engineers. Implementing STEM therefore faces practical obstacles: rigid curricula that separate subjects and standardize learning outcomes; assessments that reward routine procedures over inquiry and exploration; and time constraints that hinder long-term, iterative projects. These institutional barriers can hinder the practical realization of Krygowska's ideal of "time for reflection, rehearsal, and consolidation" [1]. To address these issues, teacher education must incorporate practice and design studies that reflect real-world teaching conditions while also providing space for experimentation. Collaborative, interdisciplinary courses—taught jointly by faculty from different departments—can provide a model for the integration expected in future classrooms.

Despite the challenges, the combination of constructivist and STEM pedagogies provides a solid foundation for rethinking teacher education. Several design principles emerge: design-based learning for teachers; prospective teachers should engage in designing their own interdisciplinary units, grounded in didactic principles and aligned with national standards. Through this process, they learn to navigate the curriculum, anticipate student thinking, and combine exploration with structure. Following Donald Schön's concept of the reflective practitioner, teachers should be trained to observe, analyze, and adapt their pedagogical strategies in real time. This is essential in STEM environments, where unexpected problems—and opportunities—emerge. Instead of rejecting traditional exercises, teachers can reframe them as gateways to interdisciplinary exploration. Teachers must see themselves not only as content providers but as part of a broader movement toward problem-oriented, socially relevant, and student-driven education. This shift in identity is often the most difficult—and most important. Krygowska's legacy provides both a solid theoretical framework and a pedagogical ethos that remain highly relevant in today's educational

landscape. By combining her focus on structured action, reflective abstraction, and the teacher's role as instructional designer with the openness and interdisciplinarity of STEM, we can begin to prepare teachers for the complex and exciting future of education. In the face of global challenges that require systems thinking and collaborative problem-solving, combining constructivist and STEM didactics offers not a contradiction but a compelling pedagogical synthesis—one that honors the past while designing for the future.

6. REFLECTIONS AND IMPLICATIONS: TOWARD A FUTURE-ORIENTED SYNTHESIS OF DIDACTIC TRADITIONS AND STEM INNOVATION

The journey from structured teaching situations to today's dynamic STEM projects is not merely a historical evolution – it reflects a profound pedagogical reinterpretation of what it means to teach and learn mathematics in a changing world. Constructivist pedagogy and STEM share fundamental assumptions about student activity, experiential learning, and problem solving. Krygowska's concept of learning as the active construction of knowledge through interaction with materials and situations resonates strongly with the ethos of integrated, inquiry-based STEM learning. Didactic situations and STEM projects are not opposites, but complementary pedagogical forms. The structural progression of mathematical abstraction envisaged by Krygowska can serve as valuable support in more open, interdisciplinary STEM task formats, helping to ensure conceptual depth while maintaining flexibility. The identity of the teacher and their preparation are crucial to this integration. Both models require teachers to become thoughtful designers of educational environments, capable of adaptation, reflection and collaboration across disciplinary boundaries. This change requires changes in initial training, continuous professional development and institutional support.

Interdisciplinary, problem-focused projects can revitalise mathematics teaching by placing it in a real-world context. This is one of the goals of the STEAME TEACHER FACILITATORS ACADEMY project implemented at the UKEN Institute of Mathematics in Krakow. The STEAME Teacher Facilitators Academies supports the training of service teachers and the training of student teachers. At a certain stage, the service teachers serve as mentors to the student teachers throughout a European mobility-based system. This creates a network between school education and university education and possibly industry, working together as co-creators for the sustainable development between teacher education providers with an impact on the quality of education in Europe. This supports the continuous professional development of future teachers and lays the groundwork for future schools of STEAME project-based learning environments for students. In times of rapid technological change and global uncertainty, education must both innovate and remember the past. Krygowska's work reminds us that mathematics is not just a body of knowledge, but a way of thinking, reasoning and engaging with the world. Similarly, STEM education challenges us to view knowledge not as isolated facts, but as tools for design, problem-solving and social transformation.

By combining these two visions – through thoughtful classroom practices, creative teacher training, and a commitment to both tradition and change – we are moving

towards a coherent, creative, and deeply human future for education.

7. REFERENCES

1. Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: WSiP.
2. Piaget, J. (1973). *To Understand Is to Invent: The Future of Education*. New York, NY: Grossman.
3. Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
4. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York, NY: Macmillan.
5. Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching* (2nd ed.). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
6. Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
7. National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM.
8. OECD. (2018). *The Future of Education and Skills: Education 2030 — The Learning Compass 2030* (Position paper). Paris: OECD Publishing.
9. English, L. D. (2016). STEM education K–12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(1), Article 3.
10. NGSS Lead States. (2013). *Next Generation Science Standards: For States, By States*. Washington, DC: National Academies Press.
11. Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds.). (2019). *GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education* (2nd ed.). COMAP / SIAM.
12. Stein, M. K., Henningsen, M. A., Schwan Smith, M., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.
13. Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). *The BSCS 5E Instructional Model: Origins and Effectiveness*. Colorado Springs, CO: BSCS.
14. Bybee, R. W. (2013). *The Case for STEM Education: Challenges and Opportunities*. Arlington, VA: NSTA Press.
15. Dewey, J. (1938). *Experience and Education*. New York, NY: Kappa Delta Pi / Macmillan.
16. Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York, NY: Basic Books.
17. Herrington, J., & Oliver, R. (2000). An instructional design framework for authentic learning environments. *Educational Technology Research and Development*, 48(3), 23–48.
18. Sriraman, B., & English, L. D. (Eds.). (2010). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. New York, NY: Springer.

19. Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction*, 26(3), 379–424.
20. Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. New York, NY: Basic Books.
21. Laurillard, D. (2012). *Teaching as a Design Science: Building Pedagogical Patterns for Learning and Technology*. London: Routledge.
22. Lampert, M. (2001). *Teaching Problems and the Problems of Teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

ROZWIJANIE ROZUMOWANIA MATEMATYCZNEGO: ZNACZENIE DYDAKTYKI KRYGOWSKIEJ W XXI-WIECZNYCH KLASACH STEM

Niniejszy artykuł analizuje powiązania między teorią sytuacji dydaktycznych Anny Zofii Krygowskiej a współczesną edukacją STEM. Powracając do jej podejścia do nauki matematyki opartego na aktywności, pokazuje, w jaki sposób jej koncepcje wpisują się w nowoczesną, interdyscyplinarną pedagogikę STEM opartą na dociekaniu. Artykuł śledzi ewolucję od ustrukturyzowanych ćwiczeń matematycznych do otwartych projektów STEM, podkreślając wspólne zasady, takie jak rozwiązywanie problemów z życia codziennego, aktywność uczniów i rolę nauczyciela jako projektanta środowiska uczenia się. Stwierdza, że dziedzictwo Krygowskiej stanowi cenną podstawę teoretyczną dla edukacji STEM i zastanawia się nad jego implikacjami dla projektowania programów nauczania i rozwoju nauczycieli.

Keywords: nauczanie oparte na aktywności, edukacja STEM, sytuacje dydaktyczne.

INTERDISCIPLINARITY IN MATHEMATICS EDUCATION IN THE CONTEXT OF STEM: A CASE STUDY OF THE URANIUM PROJECT

Agnieszka WAŁACHOWSKA

Politechnika Gdańska, Wydział Zarządzania i Ekonomii
tel.: 58 347 13 21 e-mail: agnwalac@pg.edu.pl

Abstract: The article addresses the issue of interdisciplinarity in mathematics education from the perspective of the STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) approach. It analyzes the fundamental assumptions of integrated education and their importance in developing interdisciplinary thinking. As a case study, it examines the URANIUM project, "Modern Modeling in Engineering at the University of Technology: from Microscale to Macroscale", implemented by Gdańsk University of Technology in cooperation with secondary school students. The study also incorporates data from an evaluation survey conducted among project participants. The article concludes with proposals for implementation and educational recommendations.

Keywords: mathematics education, STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), interdisciplinarity, educational project.

1. INTRODUCTION

1.1. Interdisciplinarity as a value in education

Contemporary mathematics education faces the challenge of preparing students to solve complex interdisciplinary problems characteristic of the 21st century. The traditional approach, which treats mathematics as an isolated field of knowledge, proves insufficient in addressing today's social, economic, and technological challenges [1, 2]. STEM education, understood as an integrated pedagogical approach that combines knowledge and skills from science, technology, engineering, and mathematics, responds to these needs [3]. Research shows that students engaged in STEM projects demonstrate a better understanding of the relationships between disciplines, develop critical thinking skills, and are more likely to pursue careers in technical or scientific fields [4].

1.2. Definition and components of STEM education

STEM education is defined as an integrated pedagogical approach characterized by six key components [3], illustrated in Figure 1. *Integrating disciplines* combining mathematical knowledge with the natural sciences, engineering, and technology. *Multiple representations* applying various forms of theoretical presentation (diagrams, models, graphs). *Realistic and relevant problem* addressing challenges that reflect real-world contexts. *Engineering design process* is a vital, iterative framework in STEM education that guides students in solving problems through stages of defining, researching, creating, testing, and refining solutions, embracing failure as part of improvement. Effective STEM education relies on students *actively collaborating* in diverse teams to develop critical

21st-century skills such as problem-solving, creativity, communication, and system thinking, fostering a community of learners who design, test, and refine solutions together.

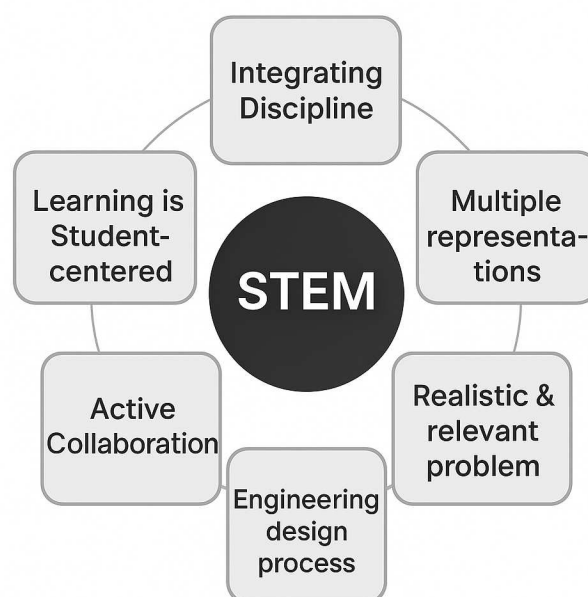


Fig. 1. Author's own work using an AI tool (ChatGPT, OpenAI, 2025)

Student-centered learning is fundamental to STEM education, focusing on engaging students through inquiry-based, hands-on activities that are appropriately challenging to develop essential knowledge, attitudes, and life skills for their future roles.

1.3. University-school partnerships in STEM education

Partnerships between universities and secondary schools play a crucial role in promoting STEM education. Research indicates that this type of collaboration benefits both students and educational institutions [5]. Students gain access to advanced laboratories, subject-matter experts, and authentic research problems, while universities can identify and nurture talents at an early stage. Especially in rural and geographically isolated areas, university-school partnerships can effectively counteract limited access to high-quality STEM experiences [5].

A similar objective is pursued by the "Uranium – Supporting Cooperation With High Schools" program at Gdańsk University of Technology. The initiative supports academic staff in building long-term partnerships with

secondary schools, particularly those located outside the Tri-City area. Its main goal is to identify highly talented students and increase their engagement in STEM through joint lectures, hands-on laboratory sessions, and collaborative research and development projects—thus reinforcing the university–school partnership model in STEM education.

2. CASE STUDY – THE URANIUM PROJECT

2.1. Characteristics of the URANIUM project

The project “Modern Modeling in Engineering at the University of Technology: from Microscale to Macroscale” was carried out within the IDUB Uranium Supporting Cooperation With High Schools initiative by Gdańsk University of Technology in collaboration with the Secondary School in Czluchów. Twenty high school students, selected through the competition “The Pomeranian Voivodeship in Numbers”, participated in the project. The program included a series of lectures, workshops, and laboratory sessions across four faculties: Chemistry, Mechanical Engineering and Ship Technology, Applied Physics and Mathematics and Management and Economics. The project offered an interdisciplinary educational journey, guiding participants from fundamental genetic information to complex social and economic systems, presenting science as a coherent whole. It also aimed to promote the natural sciences by demonstrating the practical applications of mathematics in interdisciplinary engineering and technological contexts.

2.2. STEM learning areas and applied activities

Contemporary research identifies four primary models of STEM integration: transdisciplinary, interdisciplinary, multidisciplinary, and contextual [2]. The interdisciplinary model, applied in the URANIUM project, emphasizes the connections between two selected STEM disciplines, enabling deep integration of mathematics with practical applications.

Table 1. STEM activities and mathematical applications by Faculty

Faculty	Activity	Math Application	STEM Area
Chemistry	DNA analysis, bacterial microbiology	genetic statistics, sequence analysis	Science + Mathematics
Mechanical Engineering	3D modeling in Autodesk Inventor	analytical geometry, linear algebra	Engineering + Mathematics
Applied Mathematics and Physics	crash tests, archery simulations	kinematics, vector analysis	Science + Mathematics
Management and Economics	econometric models, market simulations	statistics, regression, time series analysis	Mathematics + Technology

Each STEM activity combined theoretical knowledge with practical application, illustrating the functional role of mathematics across disciplines. For example, DNA statistical analysis linked molecular biology with probability and kinship coefficient analysis. 3D modeling in Autodesk Inventor applied analytical geometry and linear algebra in engineering design. Physics–mathematics sessions explored projectile motion through archery simulations and crash tests, allowing students to observe dynamics, parabolic

motion, air resistance, and vector dependencies. Economic modules focused on demand modeling and market simulations, applying regression, descriptive statistics, and time series analysis. This interdisciplinary approach highlighted mathematics as a universal language for science, engineering, and technology, supporting real-world problem-solving in various contexts.

3. RESULTS OF THE EVALUATION SURVEY

After the completion of the project, an anonymous survey was conducted among participants to evaluate the reception of the implemented activities. The questionnaire included questions regarding, among others, the project’s influence on educational decisions, the attractiveness of classes at various faculties, the comprehensibility of classes, and the overall assessment of project organization.

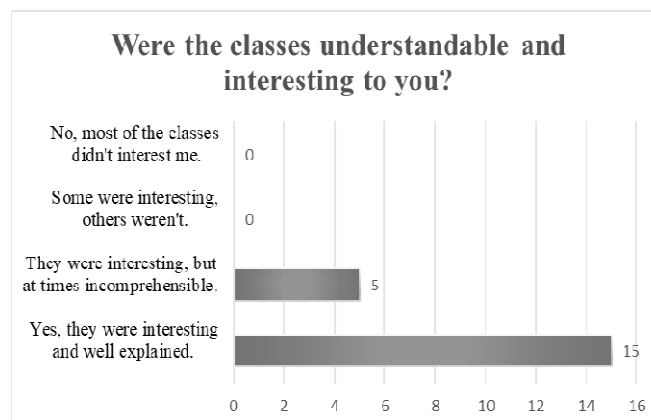


Fig. 2. Understandability and attractiveness of classes according to respondents' responses.

Based on the results presented in the chart (Fig. 2), the vast majority of participants (75%) found the classes both comprehensible and engaging (“Yes, they were interesting and well explained”). Another group (25%) assessed them as interesting but occasionally difficult to understand. None of the respondents indicated that most of the classes were uninteresting or entirely incomprehensible, which clearly reflects the exceptionally high academic and didactic quality of the program.

When analyzing answers to the open-ended question about the most attractive project elements, participants most frequently highlighted and highly rated the interactivity and practical nature of the classes (both workshops and field activities), the competence and openness of instructors, as well as unusual elements such as archery or field experiments, which enhanced engagement and stimulated curiosity.

The analysis of responses revealed a differentiated impact of the project on participants’ study choices (Fig. 3). Half of the respondents (50%) indicated that the project helped them narrow down their options, although they were still considering their final choice.

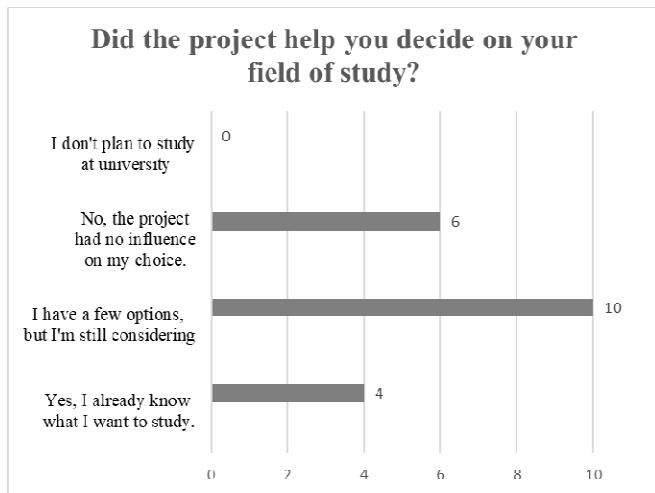


Fig. 3. Project influence on educational path decisions

One-third (30%) stated that the project had no influence on their decision, while 20% had already selected a specific field of study as a result of their participation.

An interesting finding is that, although the project did not directly affect the choice of field of study for some participants, all respondents (100%) declared they would recommend the project to younger students. This suggests that the educational value of the project extends beyond its direct impact on career decisions.

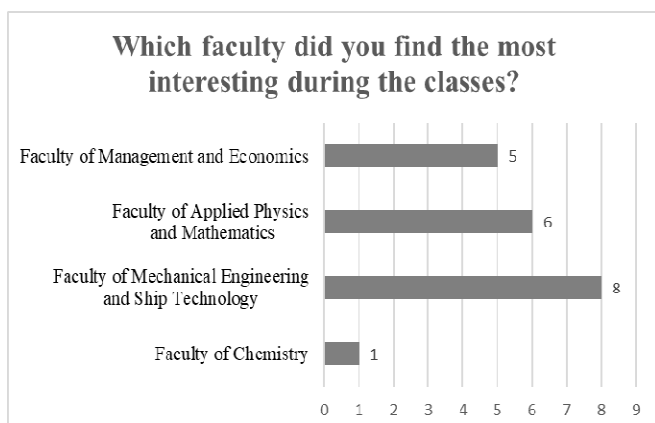


Fig. 4. Student interest in different faculties during classes

The Faculty of Mechanical Engineering proved to be the most popular, selected by 40% of respondents as the most interesting. The Faculty of Applied Mathematics and Physics was indicated by 30%, while the Faculty of Management and Economics received 25%. These results may reflect the traditional perception of mechanical engineering as the most “tangible” and practical technical discipline. The Faculty of Chemistry received the fewest indications, which may suggest lower student interest in chemical topics. However, it should be emphasized that lower interest may not only stem from the discipline itself but also from the teaching format, the level of practical application, or students’ prior experiences with chemistry as a school subject.

4. METHODOLOGICAL LIMITATIONS

The conducted study has several important limitations. First, the small research sample (20 respondents) restricts the generalizability of results. Second, the absence of a control

group makes it impossible to definitively state that the observed effects result from the interdisciplinary approach rather than a general interest in technical topics. Moreover, the evaluation was carried out immediately after project completion, which may have induced a positive bias due to the novelty effect. The long-term impact of the project on participants’ educational choices remains unknown.

5. CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS

The URANIUM project “Modern Modeling in Engineering at the Technical University: from Microscale to Macroscale” serves as an example of effective implementation of interdisciplinary mathematics education in the STEM context. The high quality ratings of classes and the unanimous recommendation of the project by participants confirm the value of such an approach in fostering mathematical competencies and motivation for learning. The project demonstrates that interdisciplinarity does not have to be a mere slogan—it can be a genuine teaching method that inspires and motivates. Integrating science, engineering, and economics enables students to develop skills that are highly valued both in the labor market and in academia.

Key conclusions from the analysis include:

- a) **The importance of authentic contexts** – presenting mathematics in the framework of real research and technological problems significantly increases student engagement.
- b) **The role of institutional partnerships** – cooperation between the university and secondary schools provides access to resources and expertise unavailable in traditional teaching.
- c) **The need for long-term evaluation** – the real impact of interdisciplinary projects on students’ professional careers requires systematic, long-term monitoring.

In the context of the growing interest in STEM education, the URANIUM project illustrates how an interdisciplinary approach can be successfully applied at the secondary school level. The conducted analysis may provide valuable insights for those involved in designing and implementing similar educational initiatives. The collected data show that students responded differently to the content delivered by various faculties, which can inform the planning of future activities. The project was carried out within the Polish educational context, and the results should be interpreted accordingly.

The integration of mathematics with other STEM disciplines was implemented in the project as both an organizational and didactic element. The findings suggest that such an approach is feasible and can be tested in other contexts, provided that appropriate methodological frameworks are followed.

6. BIBLIOGRAPHY

1. Goos, M., Carreira, S. & Namukasa, I.K. (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM Mathematics Education* 55, 1199–1217 <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z>
2. Manunure, K., & Leung, A. (2024). Integrating inquiry and mathematical modeling when teaching a common topic in lower secondary school: an iSTEM approach.

- Frontiers in Education, 9, Article 1376951. <https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1376951>
3. Nugraha, M. G., Kidman, G., & Tan, H. (2024). Interdisciplinary STEM education foundational concepts: Implementation for knowledge creation. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20(10), em2523. <https://doi.org/10.29333/ejmste/15471>
4. Chistyakov, A. A., Zhdanov, S. P., Avdeeva, E. L., Dyadichenko, E. A., Kunitsyna, M. L., & Yagudina, R. I. (2023). Exploring the characteristics and effectiveness of project-based learning for science and STEAM education. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19(5), em2256. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13128>
5. Rivera, S., Kavanagh, K., DeWaters, J., Ramsdell, M., Burkhalt, L., Johns, L., Taylor, N., Smith, M., & Beldock, L. (2025). Secondary school-university partnerships foster STEM interest and self-agency in rural students. Frontiers in Education, 10, Article 1578370. <https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1578370>

INTERDYSCYPLINARNOŚĆ W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KONTEKŚCIE STEM: STUDIUM PRZYPADKU PROJEKTU URANIUM

Artykuł podejmuje temat interdyscyplinarności w edukacji matematycznej z perspektywy podejścia STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Przeanalizowano podstawowe założenia kształcenia zintegrowanego oraz ich znaczenie w rozwijaniu myślenia interdyscyplinarnego. Studium przypadku stanowi projekt URANIUM „Nowoczesne modelowanie w technice na Politechnice: od mikroskali do makroskali”, realizowany przez Politechnikę Gdańską we współpracy z uczniami liceum. Uwzględniono także dane z ankiety ewaluacyjnej przeprowadzonej wśród uczestników projektu. Artykuł kończy się propozycjami wdrożeń i rekomendacjami edukacyjnymi.

Słowa kluczowe: edukacja matematyczna, STEM, interdyscyplinarność, projekt edukacyjny.

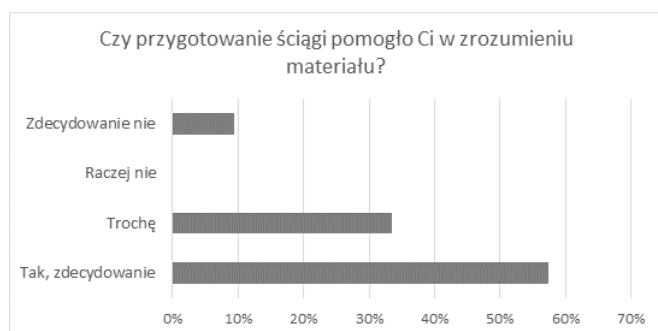
Rys. 1. Chmura wyrazowa – skojarzenia studentów



Rys. 2. Wpływ korzystania z infografiki na poziom pewności siebie

Drugie pytanie ankiety dotyczyło tego, czy przygotowanie ściegi pomogło studentom w zrozumieniu materiału.

Z odpowiedzi studentów wynika, że przygotowanie infografiki miało istotny wpływ na zrozumienie materiału. Ponad połowa ankietowanych (57%) zadeklarowała, że zdecydowanie pomogło im to w nauce, a kolejne 33,3% uznało, że miało to przynajmniej częściowy efekt (rys. 3). Grupa (9 %) wyraziła wątpliwości co do skuteczności tej metody i oceniła ją jako całkowicie bezużyteczną.

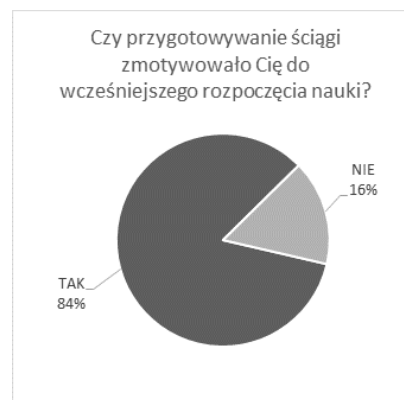


Rys. 3. Wpływ przygotowania infografiki na zrozumienie materiału

Przewaga odpowiedzi pozytywnych pokazuje, że tworzenie infografiki nie było tylko technicznym zadaniem. Studenci musieli samodzielnie wybrać najważniejsze informacje, uporządkować je i przedstawić w przejrzysty sposób. Ten proces wymagał aktywnego myślenia, co sprzyjało lepszemu zrozumieniu zagadnień matematycznych. Można więc powiedzieć, że przygotowanie infografiki było formą nauki, która pomagała nie tylko w organizacji wiedzy, ale też w jej głębszym przyswojeniu.

Wnioski te są zgodne z ustaleniami zespołu badawczego z King's College London [1], który wykazał, że samodzielne tworzenie materiałów pomocniczych, takich jak ściegi czy infografiki, wspiera głębokie uczenie się i redukuje stres egzaminacyjny. Autorzy podkreślają, że kluczowe znaczenie ma nie tyle samo korzystanie z materiału podczas egzaminu, co proces jego przygotowania wymagający analizy i refleksji nad treścią.

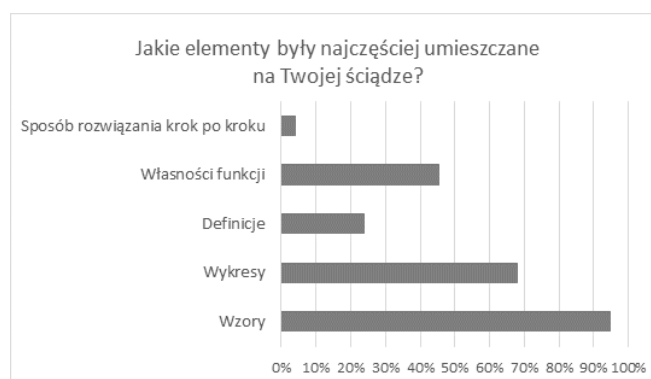
W kolejnym pytaniu (rys.4) studenci zostali zapytani, czy przygotowywanie ściegi zmotywowało ich do wcześniejszego rozpoczęcia nauki. Aż 84% studentów odpowiedziało twierdząco, wskazując, że konieczność stworzenia infografiki skłoniła ich do wcześniejszego zapoznania się z materiałem. Tylko 16% uczestników badania nie odczuło takiego wpływu.



Rys. 4. Wpływ przygotowania infografiki na czas rozpoczęcia nauki

Wynik ten potwierdza, że wprowadzenie obowiązku przygotowania infografiki może pełnić funkcję nie tylko wspierającą, ale również mobilizującą. Studenci, wiedząc, że będą musieli oddać swoją pracę tydzień przed kolokwium, wcześniej angażowali się w naukę, co sprzyjało lepszemu rozplanowaniu czasu i systematycznemu przyswajaniu treści. Tym samym infografika staje się nie tylko narzędziem pomocniczym, ale również elementem strategii dydaktycznej, który wspiera rozwój nawyków związanych z samodzielnym uczeniem się.

Kolejne pytanie dotyczyło rodzaju informacji umieszczanych przez studentów na infografikach (rys. 5).



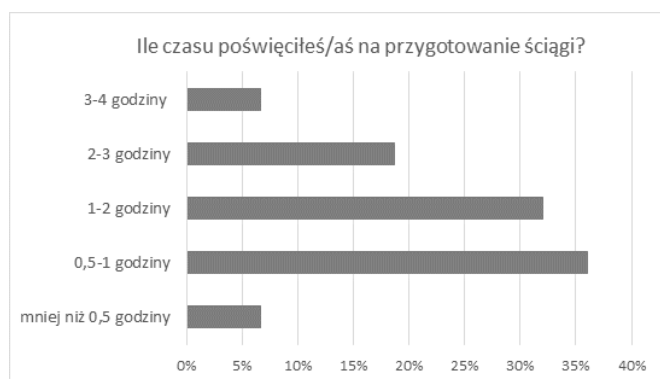
Rys. 5. Rodzaj informacji umieszczanych na infografikach

Zdecydowanie najczęściej umieszczanym elementem były wzory (94 % odpowiedzi), co wskazuje na ich kluczową rolę w rozwiązywaniu zadań matematycznych. Na drugim miejscu znalazły się wykresy (68%), wspierające wizualne rozumienie funkcji i zależności. Własności funkcji (44%) oraz definicje (24%) również odgrywały istotną rolę, choć pojawiały się rzadziej. Pozostałe elementy, takie jak sposoby rozwiązywania zadań, występowały sporadycznie (pojedyncze wskazania). Sytuacja ta była bezpośrednią konsekwencją ograniczeń regulaminowych dotyczących zawartości ścieg. W szczególności, regulamin jednoznacznie zabraniał umieszczania przykładów numerycznych. W rezultacie, ryzyko niejednoznacznej interpretacji oraz obawa przed utratą przygotowanego materiału skłoniły studentów do powstrzymania się od stosowania schematów symbolicznych (tj. ogólnych symboli lub skrótów reprezentujących skomplikowane procedury), co miało na celu uniknięcie potencjalnych kontrowersji regulaminowych.

W badaniu Michael de Raadt [2] na Uniwersytecie Południowym Queensland w Australii zaprezentowanym na

konferencji ACE, analizowano wpływ tworzenia ściąg w kontekście egzaminów z programowania. Studenci, którzy samodzielnie przygotowywali materiały pomocnicze, najczęściej umieszczali struktury kodu, definicje funkcji oraz schematy algorytmiczne. Podobnie jak wśród studentów Politechniki Gdańskiej, dominowały elementy syntetyczne i techniczne, a nie pełne rozwiązania zadań. Autorzy podkreślali, że proces selekcji treści do ściąg wspierał głębsze zrozumienie materiału i rozwój umiejętności analitycznych.

W odpowiedzi na pytanie „Ile czasu poświęciłeś/aś na przygotowanie ściąg?” studenci wskazali zróżnicowany czas pracy nad materiałem (rys. 6).



Rys. 6. Czas pracy przygotowania infografiki

Najwięcej studentów (36%) zadeklarowało, że przygotowanie infografiki zajęło im od 30 do 60 minut. Niewiele mniej, bo 32%, poświęciło na to od 1 do 2 godzin. Kolejna grupa (8%) przygotowała infografikę w czasie krótszym niż 30 minut. Pozostałe odpowiedzi mieściły się w przedziałach 2–3 godziny oraz 3–4 godziny.

Wyniki te wskazują, że dla większości studentów przygotowanie infografiki wiązało się z umiarkowanym nakładem czasu – od pół godziny do dwóch godzin. Sugeruje to, że proces ten był traktowany jako ważny element nauki, a nie jedynie formalność. Czas przeznaczony na selekcję treści, ich uporządkowanie i graficzne opracowanie świadczy o zaangażowaniu studentów oraz świadomym podejściu do nauki.

2.2 Pytania otwarte

Analiza otwartych wypowiedzi studentów pozwala wyróżnić kilka wyraźnych tendencji, wskazujących na pozytywny odbiór wprowadzenia infografiki jako narzędzia wspomagającego podczas kolokwium:

- Redukcja stresu egzaminacyjnego.

Najczęściej powtarzającym się motywem była ulga związana z mniejszym stresem. Studenci podkreślali, że świadomość posiadania ściąg pozwalała im skupić się na rozwiązywaniu zadań, a nie na zapamiętywaniu wzorów. Wypowiedzi takie jak „dodaje otuchy”, „zmniejsza stres” czy „komfort podczas pisania” pojawiały się wielokrotnie.

- Wzrost pewności siebie.

Wielu studentów wskazało, że możliwość korzystania ze ściąg zwiększyła ich poczucie kompetencji i pewności siebie. Studenci czuli się bardziej przygotowani, co przekładało się na spokojniejsze podejście do kolokwium.

- Skupienie na rozwiązywaniu zadań.

Zamiast koncentrować się na pamięciowym opanowaniu wzorów, studenci mogli poświęcić więcej czasu na ćwiczenie zadań i zrozumienie materiału. To podejście sprzyjało

głębszemu uczeniu się i redukcji błędów wynikających z stresu lub pomyłek.

- Motywacja do nauki.

Proces tworzenia infografiki był dla wielu studentów impulsem do wcześniejszego uporządkowania wiedzy. Pojawiały się opinie, że sama konieczność przygotowania materiału motywowała do systematycznej nauki.

- Pozytywne nastawienie do metody.

Zdecydowana większość wypowiedzi miała charakter pozytywny, często entuzjastyczny. Studenci określali metodę jako „świetną”, „genialną”, „doskonałą”, a nawet „tak jak powinno zawsze być”. Tylko jedna wypowiedź miała charakter negatywny, co wskazuje na bardzo wysoką akceptację tej formy wsparcia.

Wprowadzenie możliwości korzystania z infografiki podczas kolokwium zostało ocenione przez studentów jako skuteczne, pomocne i motywujące rozwiązanie dydaktyczne. Opinie te są zgodne z innymi badaniami, m.in. de Raadta [2] oraz Harper [3] które podkreślają wartość edukacyjną samodzielnie tworzonych materiałów pomocniczych.

W ramach pytań otwartych studenci zostali również poproszeni o wskazanie ewentualnych zmian, jakie wprowadziliby w zasadach korzystania z infografik. Najczęściej powtarzającą się opinią (41% odpowiedzi) była akceptacja obecnych reguł. Studenci określali system jako „dobry”, „w porządku”, „dopracowany” czy „niewymagający zmian”. Wyniki te wskazują na wysoką satysfakcję z obowiązujących zasad oraz na ich przejrzystość i funkcjonalność.

Drugą najczęściej zgłaszaną sugestią było rozszerzenie formatu infografiki – np. poprzez możliwość pisania na obu stronach kartki lub zwiększenie jej rozmiaru bądź liczby stron. Studenci wskazywali, że przy większej ilości materiału taka zmiana umożliwiłaby bardziej efektywne wykorzystanie dostępnej przestrzeni.

3. WNIOSKI KOŃCOWE

Przeprowadzona analiza wykazała, że możliwość przygotowania i wykorzystania infografiki podczas kolokwium z matematyki znacząco wpływa na poprawę komfortu psychicznego studentów, zwiększenie ich pewności siebie oraz efektywność procesu uczenia się. Studenci nie tylko pozytywnie ocenili samą metodę, ale również wskazali, że proces tworzenia infografiki motywował ich do wcześniejszego rozpoczęcia nauki i sprzyjał głębszemu zrozumieniu materiału.

W kontekście współczesnych realiów edukacyjnych, warto podkreślić, że młodzież ma dziś niemal nieograniczony dostęp do informacji. Wymaganie od studentów pamięciowego opanowania wzorów i definicji traci na znaczeniu, ustępując miejsca kompetencjom związanym z analizą, selekcją i zastosowaniem wiedzy w praktyce. Infografika, jako narzędzie dydaktyczne, doskonale wpisuje się w ten model uczenia się, wspierając organizację wiedzy, redukcję stresu egzaminacyjnego oraz rozwój umiejętności analitycznych.

Wysoka akceptacja tej formy pomocy oraz pozytywne opinie studentów potwierdzają jej wartość edukacyjną i potencjał do szerszego zastosowania w nauczaniu przedmiotów ścisłych. Wprowadzenie infografik jako stałego elementu strategii dydaktycznej może przyczynić się do budowania bardziej przyjaznego środowiska edukacyjnego, wspierającego samodzielność, systematyczność oraz aktywne uczenie się studentów.

4. BIBLIOGRAFIA

1. Denovan A., Macaskill A.: Stress and Subjective Well-Being Among First Year UK Undergraduate Students, Manchester Metropolitan University & Sheffield Hallam University, Springer, 2016.
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10902-016-9736-y.pdf>
2. de Raadt M.: The Impact of Student-Created Cheat Sheets on Learning Outcomes in Programming Exams, Proceedings of the Australasian Computing Education Conference (ACE), 2012
3. Harper A.: How Exam Cheat Sheets Shape Student Success, University of North Carolina, Office for Undergraduate Research, 2024.
<https://our.unc.edu/abstract/harper-how-exam-cheat-sheets-shape-student-success/>

INFOGRAPHICS AS A DIDACTIC TOOL. ANALYSIS OF STUDENTS' EXPERIENCES AT GDAŃSK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

The article examines an initiative introduced by lecturers at Gdańsk University of Technology, which allows students to use self-prepared infographics (cheat sheets) during mathematics tests. The aim of the study was to understand the impact of this strategy on student satisfaction, mental well-being, and the learning process. Survey data collected from students reveal that the opportunity to use infographics significantly reduces exam anxiety and increases self-confidence during the test.

Keywords: infographics, stress, math.

MATEMATYKA W DOBIE SZTUCZNEJ INTELIGENCJI: WYZWANIA I MOŻLIWOŚCI DYDAKTYCZNE

Małgorzata ZDRODOWSKA¹, Agnieszka DARDZIŃSKA-GŁĘBOCKA², Anna KASPERCZUK³

1. Instytut Inżynierii Biomedycznej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka
tel.: 797 990 774 e-mail: m.zdrowska@pb.edu.pl
2. Instytut Inżynierii Mechanicznej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka
tel.: 571 443 022 e-mail: a.dardzinska@pb.edu.pl
3. Instytut Inżynierii Biomedycznej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka
tel.: 503 737 803 e-mail: a.kasperczuk@pb.edu.pl

Streszczenie: Artykuł przedstawia przegląd zastosowań, wyzwań i kierunków rozwoju sztucznej inteligencji w dydaktyce matematyki na poziomie akademickim. Omówiono główne obszary wykorzystania AI oraz wskazano korzyści w zakresie personalizacji nauczania i diagnozowania trudności oraz główne ograniczenia dotyczące jakości danych, przygotowania kadry, przejrzystości algorytmów i etyki. Zaproponowano kierunki rozwoju obejmujące tworzenie kontekstowo wrażliwych systemów adaptacyjnych, wiarygodnych modeli generatywnych, standardów etycznych i otwartych repozytoriów danych. Podkreślono, że efektywne wykorzystanie AI wymaga świadomej metodyki i odpowiedzialnego podejścia.

Słowa kluczowe: sztuczna inteligencja, edukacja matematyczna, innowacje dydaktyczne.

1. WSTĘP

Matematyka od zawsze zajmuje szczególne miejsce w edukacji. To nie tylko zbiór wzorów i definicji, ale sposób myślenia, który uczy logicznego rozumowania, rozwiązywania problemów i dostrzegania zależności w świecie. Dobrze prowadzona edukacja matematyczna pomaga studentom rozwijać umiejętność analizy, argumentacji i pracy z abstrakcyjnymi pojęciami, czyli te kompetencje które są niezbędne w niemal każdej dziedzinie nauki i technologii.

W dobie dynamicznego rozwoju technologii, sztuczna inteligencja (AI) staje się coraz bardziej integralną częścią życia codziennego, w tym także edukacji matematycznej. Tradycyjne metody nauczania matematyki ulegają transformacji, gdyż AI umożliwia tworzenie bardziej spersonalizowanych, interaktywnych i efektywnych procesów edukacyjnych. Wykorzystanie inteligentnych asystentów, platform adaptacyjnych czy automatyzacji oceniania otwiera nowe możliwości, ale jednocześnie stawia przed nauczycielami i uczniami szereg wyzwań technologicznych, organizacyjnych oraz etycznych. Rozwiązania oparte na sztucznej inteligencji redefiniują relacje między nauczycielem i studentem. AI potrafi analizować błędy, sugerować indywidualne ścieżki nauki, czy generować materiały dydaktyczne w czasie rzeczywistym. Wraz z tymi możliwościami pojawia się jednak potrzeba refleksji nad ich konsekwencjami dla samodzielności poznawczej studentów i dla roli nauczyciela akademickiego.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie kluczowych wyzwań oraz potencjału, jaki niosą ze sobą nowoczesne technologie sztucznej inteligencji w dydaktyce matematyki na poziomie akademickim. Artykuł ma charakter przeglądowy i ma na celu zainicjowanie refleksji nad przyszłością kształcenia matematycznego w kontekście dynamicznie rozwijających się technologii AI.

2. ZASTOSOWANIA SZTUCZNEJ INTELIGENCJI W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Sztuczna inteligencja coraz silniej oddziałuje na współczesną edukację, w tym także na dydaktykę matematyki, wprowadzając nowe sposoby nauczania, oceniania i organizowania procesu uczenia się. Dynamiczny rozwój technologii uczenia maszynowego, analizy danych oraz systemów generatywnych sprawia, że nauczanie matematyki staje się procesem bardziej zindywidualizowanym i elastycznym [1, 2]. Współczesne rozwiązania oparte na AI pozwalają nauczycielowi lepiej zrozumieć potrzeby ucznia, a samym uczniom poznawać treści matematyczne w sposób dostosowany do ich stylu uczenia się i poziomu przygotowania [3, 4].

Istotnym kierunkiem zastosowań AI są inteligentne systemy nauczania (Intelligent Tutoring Systems, ITS). Ich celem jest symulowanie procesu dydaktycznego poprzez analizę odpowiedzi ucznia i generowanie spersonalizowanych wskazówek. Systemy te potrafią diagnozować braki w wiedzy, dostosowywać poziom trudności zadań oraz udzielać natychmiastowej informacji zwrotnej [4, 6]. W matematyce stosowane są m.in. do nauczania algebry, geometrii, rachunku różniczkowego i statystyki. Umożliwiają tworzenie indywidualnych ścieżek uczenia się, co pozwala każdemu uczniowi postępować w swoim tempie. W ramach ITS nauczyciel może również monitorować proces uczenia się, obserwując postępy całej grupy i reagując na trudności pojawiające się w czasie rzeczywistym [3].

Drugim ważnym obszarem rozwoju są systemy adaptacyjnego uczenia się (Adaptive Learning Systems, ALS). Wykorzystują one algorytmy sztucznej inteligencji do bieżącej analizy danych o uczniu, takich jak czas rozwiązywania zadań, liczba prób czy typy popełnianych błędów. Na tej podstawie system samodzielnie dobiera kolejne treści, ćwiczenia i przykłady tak, by jak najlepiej odpowiadały aktual-

nym potrzebom użytkownika [1, 6]. W matematyce takie rozwiązania są szczególnie użyteczne w nauczaniu tematów wymagających sekwencyjnego rozumienia, np. funkcji, równań czy dowodów. Dzięki temu możliwe jest nie tylko dopasowanie poziomu trudności, lecz również modelowanie strategii poznawczych ucznia.

Rozwój generatywnej sztucznej inteligencji po 2022 roku otworzył nowy etap w dydaktyce matematyki. Modele językowe dużej skali, takie jak ChatGPT, Gemini czy Claude, potrafią generować objaśnienia, przykłady i komentarze w języku naturalnym, wspomagając proces uczenia się [5]. W kontekście matematyki wykorzystuje się je do automatycznego generowania zadań o określonych parametrach, przygotowywania testów, analizowania rozwiązań uczniów oraz konstruowania pytań diagnostycznych. Coraz częściej pojawiają się też aplikacje edukacyjne z wbudowanymi asystentami AI, którzy potrafią prowadzić rozmowę z uczniem, odpowiadać na pytania i tłumaczyć pojęcia krok po kroku [2]. Takie konwersacyjne boty edukacyjne oparte na przetwarzaniu języka naturalnego (NLP) stają się istotnym elementem nowoczesnych środowisk e-learningowych.

Współczesna edukacja matematyczna korzysta również z potencjału analityki edukacyjnej (Learning Analytics). Zastosowanie AI pozwala analizować duże zbiory danych dotyczących procesu uczenia się, identyfikować wzorce w zachowaniach uczniów i wskazywać obszary wymagające wsparcia [4, 7]. Algorytmy potrafią przewidywać prawdopodobieństwo osiągnięcia sukcesu w nauce, określać moment, w którym uczeń może potrzebować interwencji nauczyciela, oraz rekomendować materiały dydaktyczne najbardziej adekwatne do jego postępów. W dydaktyce matematyki analityka edukacyjna znajduje zastosowanie w monitorowaniu rozumienia pojęć, analizy błędów w rozumowaniu i wykrywaniu trudności typowych dla określonych zagadnień (np. ułamków, proporcji czy równań kwadratowych).

Kolejnym kierunkiem wykorzystania AI jest robotyka edukacyjna oraz integracja z technologiami rzeczywistości rozszerzonej (AR). Roboty i aplikacje AR/VR pozwalają uczniom wizualizować złożone zależności geometryczne i algebraiczne w sposób interaktywny [3, 6]. Takie środowiska angażują ucznia w aktywne eksperymentowanie, łącząc elementy zabawy z pogłębionym rozumieniem pojęć matematycznych. W edukacji wczesnoszkolnej roboty mogą pełnić rolę materialnego nośnika pojęć liczbowych i przestrzennych, natomiast w nauczaniu akademickim mogą wspierać symulacje i modelowanie danych.

Wszystkie wymienione kierunki rozwoju, czyli inteligentne systemy nauczania, adaptacyjne technologie, chatboty konwersacyjne, analityka edukacyjna oraz robotyka, wskazują, że sztuczna inteligencja stała się integralnym elementem dydaktyki matematyki. Jej zadaniem nie jest zastąpienie nauczyciela, lecz rozszerzenie jego możliwości poprzez analizę danych, automatyzację zadań organizacyjnych i tworzenie środowisk, w których uczeń może samodzielnie odkrywać zależności matematyczne. Przyszłość edukacji matematycznej opiera się na współdziałaniu człowieka i maszyny w relacji, w której nauczyciel pozostaje przewodnikiem intelektualnym, a AI stanowi narzędzie wspierające poznanie i rozumienie [2, 4, 7].

3. WYZWANIA I OGRANICZENIA AI W DYDAKTYCE MATEMATYKI

Wraz z coraz szerszym wykorzystaniem sztucznej inteligencji w edukacji matematycznej pojawiają się nowe wy-

zwania i ograniczenia, które dotyczą zarówno aspektów technologicznych, dydaktycznych, jak i etycznych. Choć AI wnosi do nauczania matematyki ogromny potencjał w zakresie indywidualizacji i automatyzacji procesu uczenia się, to jej wdrożenie wymaga odpowiedzialnego podejścia i zrozumienia ograniczeń wynikających z natury tej technologii [1, 2, 7].

Jednym z najczęściej podnoszonych problemów jest brak odpowiedniego przygotowania nauczycieli do pracy z systemami opartymi na sztucznej inteligencji. Jak zauważa Hwang [4], skuteczna integracja AI w dydaktyce matematyki wymaga od nauczycieli nowych kompetencji technologicznych, metodycznych i krytycznych, a także gotowości do zmiany tradycyjnych ról dydaktycznych. Wielu pedagogów postrzega AI jako zagrożenie dla autonomii nauczyciela lub narzędzie, które może dehumanizować relację z uczniem. Panqueban i Huinchahue [3] podkreślają, że w wielu badaniach obserwuje się zjawisko „technologicznego oporu”, czyli niechęci nauczycieli do powierzania istotnych funkcji edukacyjnych algorytmom, co skutkuje powierzchownym lub pozornym wykorzystaniem technologii w nauczaniu matematyki.

Drugim istotnym ograniczeniem jest zależność jakości procesu dydaktycznego od jakości danych, na których uczą się systemy AI. W przypadku edukacji matematycznej dane te często są zbyt ograniczone, fragmentaryczne lub nieodzwierciedlające zróżnicowania stylów poznawczych uczniów [6]. Algorytmy uczące się na niepełnych lub stronicznych zbiorach danych mogą prowadzić do błędnych rekomendacji, nieadekwatnych diagnoz lub utrwalania uprzedzeń. Garzón i inni [7] wskazują, że szczególnie problematyczne jest stosowanie generatywnych modeli językowych (np. ChatGPT) w ocenie wypowiedzi uczniów, gdyż modele te nie zawsze potrafią właściwie interpretować kontekst matematyczny, a ich odpowiedzi mogą zawierać błędy merytoryczne.

Z wyżej wymienionym problemem ściśle wiąże się kwestia transparentności algorytmów. W większości systemów edukacyjnych opartych na AI sposób, w jaki algorytmy analizują dane i podejmują decyzje, pozostaje niejawnym dla użytkowników [5, 7]. Nauczyciel często nie ma możliwości zweryfikowania, dlaczego system uznał daną odpowiedź ucznia za błędną lub zaproponował określony zestaw zadań. Brak tej przejrzystości utrudnia pełną kontrolę dydaktyczną i ogranicza zaufanie do systemów opartych na AI.

Kolejnym wyzwaniem jest kwestia etyki i bezpieczeństwa danych uczniów. Wdrażanie AI w edukacji wiąże się z gromadzeniem i przetwarzaniem dużych ilości informacji o użytkownikach, ich wynikach, sposobach uczenia się, a nawet emocjach w czasie pracy z systemem. Awang i inni [2] zwracają uwagę, że wiele rozwiązań nie spełnia jeszcze standardów w zakresie ochrony prywatności uczniów, co rodzi ryzyko nieuprawnionego wykorzystania danych. W szczególności, w środowiskach szkolnych i akademickich konieczne jest jasne określenie zasad przechowywania i anonimizacji informacji.

Nie bez znaczenia pozostaje także kwestia wiarygodności i precyzji generatywnych modeli językowych stosowanych w dydaktyce matematyki. Jak wskazują Baytas i Ruediger [5], modele te są podatne na błędy obliczeniowe i często generują poprawnie sformułowane, lecz merytorycznie błędne rozwiązania. W kontekście nauczania matematyki, czyli dziedziny, w której logika i dowód mają fundamentalne znaczenie, takie nieścisłości mogą prowadzić do utrwalenia błędnych schematów myślowych.

Wyzwania dotyczą również różnic kontekstowych i kulturowych w zastosowaniu AI w edukacji. Badania Hwang i Tu [4] oraz Mohameda i innych [8] pokazują, że skuteczność systemów AI jest silnie uzależniona od lokalnych uwarunkowań edukacyjnych, programów nauczania, poziomu cyfryzacji szkół, a także barier językowych. Modele oparte na anglojęzycznych danych nie zawsze prawidłowo interpretują terminologię matematyczną w innych językach, co utrudnia ich implementację w systemach edukacyjnych krajów nieanglojęzycznych.

Wśród ograniczeń AI w dydaktyce matematyki wymienia się także brak komponentu emocjonalnego w relacji uczeń – system. Mimo że niektóre rozwiązania próbują rozpoznawać emocje uczniów na podstawie ekspresji twarzy lub tonu głosu, systemy te wciąż nie potrafią w pełni zastąpić empatii nauczyciela, która odgrywa istotną rolę w motywowaniu do nauki i przezwyciężaniu trudności poznawczych [3, 4].

Z perspektywy organizacyjnej wyzwaniem pozostaje integracja AI z istniejącymi strukturami dydaktycznymi i administracyjnymi. Du Plooy i inni [1] zauważają, że uczelnie i szkoły często wdrażają systemy sztucznej inteligencji w sposób fragmentaryczny, jako dodatki do tradycyjnych platform e-learningowych, bez spójnej strategii wdrożeniowej i ewaluacyjnej. Brakuje także jednolitych standardów oceny skuteczności tych narzędzi, co utrudnia porównywanie wyników badań i praktyk.

Podsumowując, AI stanowi narzędzie o ogromnym potencjale, jednak jego efektywne i etyczne wykorzystanie wymaga świadomego i odpowiedzialnego podejścia ze strony całego środowiska edukacyjnego [2, 4, 7].

4. KIERUNKI ROZWOJU I REKOMENDACJE

Rozwój sztucznej inteligencji w edukacji matematycznej stanowi jeden z najbardziej dynamicznych kierunków współczesnej dydaktyki. W ostatnich latach nastąpiło przejście od prostych systemów wspomagających nauczanie do złożonych, samouczących się środowisk edukacyjnych, które analizują dane, dostosowują treści i wspierają proces poznawczy uczniów w sposób niemal autonomiczny [1, 4]. W przyszłości oczekuje się dalszej integracji AI z metodami dydaktyki matematyki, przy jednoczesnym zachowaniu równowagi między automatyzacją procesu uczenia a refleksyjnym podejściem pedagogicznym.

W literaturze wskazuje się kilka głównych kierunków rozwoju sztucznej inteligencji w dydaktyce matematyki. Pierwszym z nich jest doskonalenie systemów adaptacyjnego uczenia się ALS. Jak podkreśla Mustafa [6], dalsze badania powinny koncentrować się na tworzeniu modeli zdolnych do dynamicznego uwzględniania emocjonalnego i poznawczego stanu ucznia. W przyszłości systemy te będą mogły integrować dane pochodzące z analizy mimiki twarzy, tonu głosu czy rytmu pracy ucznia, co pozwoli na tworzenie bardziej empatycznych i kontekstowo wrażliwych środowisk uczenia się.

Drugim obszarem rozwoju jest zaawansowana analityka edukacyjna, wspierająca decyzje nauczyciela na podstawie wielowymiarowych danych [7]. Algorytmy uczenia maszynowego mogą w przyszłości łączyć informacje z wielu źródeł: wyników testów, interakcji w środowisku wirtualnym czy aktywności uczniów w sieci, tworząc precyzyjne profile uczących się. Umożliwi to projektowanie spersonalizowanych ścieżek rozwoju matematycznego oraz wczesne rozpoznawanie trudności w nauce.

Kolejnym kierunkiem jest rozwój generatywnych modeli językowych wyspecjalizowanych w edukacji matematycznej. Obecnie dostępne modele, takie jak ChatGPT czy Gemini, charakteryzują się dużą elastycznością językową, ale nie zawsze zachowują ścisłość logiczno-matematyczną [5]. W nadchodzących latach konieczne będzie tworzenie wyspecjalizowanych wersji tych modeli, zasilanych zbiorem danych matematycznych, które będą w stanie generować poprawne merytorycznie rozwiązania, dowody i komentarze dydaktyczne. Jak zauważają Awang i inni [2], rozwój tych narzędzi może prowadzić do powstania inteligentnych asystentów dydaktycznych, którzy będą w stanie wspierać nauczyciela w przygotowywaniu materiałów, diagnozowaniu trudności uczniów i projektowaniu indywidualnych zadań.

Znaczącą rolę w przyszłości odegra również integracja AI z rzeczywistością rozszerzoną AR i wirtualną VR. Panqueban i Huincahue [3] wskazują, że technologie te umożliwią uczniom eksplorowanie pojęć matematycznych w przestrzeni trójwymiarowej, np. wizualizację funkcji, brył i zależności geometrycznych, co przyczyni się do głębszego rozumienia struktur matematycznych. Połączenie AI i AR/VR pozwoli na tworzenie środowisk immersyjnych, w których uczeń będzie mógł eksperymentować, popełniać błędy i natychmiast obserwować ich skutki.

Równoległe do rozwoju technologicznego niezbędne jest opracowanie standardów etycznych i dydaktycznych dotyczących wykorzystania AI w matematyce. Garzón i inni [7] postulują stworzenie ram etycznych obejmujących kwestie prywatności danych, przejrzystości algorytmów i odpowiedzialności za decyzje podejmowane przez systemy. Hwang i Tu [4] dodają, że przyszłe badania powinny koncentrować się na opracowaniu metod oceny wiarygodności i trafności edukacyjnej algorytmów, tak aby nauczyciel mógł zrozumieć mechanizmy działania systemu i świadomie korzystać z jego rekomendacji.

W kontekście instytucjonalnym istotnym wyzwaniem na przyszłość jest opracowanie strategii integracji AI w systemach szkolnych i akademickich. Du Plooy i inni [1] zwracają uwagę, że skuteczne wdrażanie AI wymaga nie tylko dostępu do narzędzi, ale również zmian organizacyjnych, obejmujących programy szkoleniowe dla nauczycieli, ewaluację efektów wdrożeń i współpracę między sektorem edukacyjnym a technologicznym. W tym celu rekomenduje się tworzenie interdyscyplinarnych zespołów łączących ekspertów z zakresu matematyki, pedagogiki, informatyki i etyki danych.

Kierunkiem o strategicznym znaczeniu jest także budowa otwartych repozytoriów danych edukacyjnych, umożliwiających trenowanie i testowanie modeli AI w sposób transparentny i zgodny z zasadami nauki otwartej [7]. Dostęp do wysokiej jakości, zróżnicowanych danych matematycznych jest warunkiem rozwoju systemów uczących się, które będą potrafiły lepiej rozumieć kontekst dydaktyczny i reagować na indywidualne potrzeby uczniów.

Z perspektywy praktyki dydaktycznej kluczową rekomendacją pozostaje kształcenie kompetencji cyfrowych i krytycznych nauczycieli matematyki. Awang i inni [2] podkreślają, że przygotowanie kadry do pracy z technologią powinno obejmować nie tylko obsługę narzędzi, ale przede wszystkim rozumienie ich ograniczeń i potencjalnych błędów poznawczych generowanych przez algorytmy. Włączenie AI do dydaktyki wymaga redefinicji roli nauczyciela, z dostarczyciela wiedzy w kierunku przewodnika i interpretera danych generowanych przez systemy.

Podsumowując, kierunki rozwoju i rekomendacje dotyczące wykorzystania sztucznej inteligencji w dydaktyce matematyki obejmują:

- tworzenie inteligentnych, kontekstowo wrażliwych systemów adaptacyjnych,
- rozwój generatywnych modeli matematycznych zapewniających poprawność merytoryczną,
- integrację AI z immersyjnymi technologiami AR/VR,
- opracowanie standardów etycznych i transparentnych algorytmów,
- budowę otwartych baz danych edukacyjnych,
- systemowe wsparcie szkolenia nauczycieli w zakresie pedagogicznego wykorzystania AI.

Jak zauważa Hwang [4], przyszłość dydaktyki matematyki będzie oparta na synergii między człowiekiem a technologią, w modelu, w którym sztuczna inteligencja stanie się nie zastępstwem, lecz przedłużeniem ludzkiego myślenia, wspierając proces rozumienia, analizy i odkrywania zależności matematycznych.

5. PODSUMOWANIE

Sztuczna inteligencja stanowi dziś jedną z najważniejszych sił transformacyjnych w edukacji matematycznej, otwierając przed nauczycielami i uczniami nowe możliwości indywidualizacji, automatyzacji i optymalizacji procesu uczenia się. Przedstawiony przegląd pokazuje, że sztuczna inteligencja nie jest dodatkiem do dydaktyki matematyki, lecz nową infrastrukturą uczenia się, od inteligentnych tutorów i systemów adaptacyjnych, przez generatywne modele językowe i analitykę edukacyjną, po robotykę i AR/VR. Te technologie przekształcają organizację pracy dydaktycznej, umożliwiają precyzyjne diagnozowanie trudności, personalizację treści i tworzenie środowisk sprzyjających aktywnemu odkrywaniu pojęć. Równocześnie ujawniają one wymagania wobec instytucji i nauczycieli, potrzebę nowych kompetencji, przejrzystości algorytmów, ładu etycznego i odpowiedzialnego zarządzania danymi.

Kluczowa konkluzja jest prosta: w matematyce AI nie uczy za nas, tylko rozszerza możliwości nauczyciela i studenta. Najlepsze efekty przynosi symbioza, mądrze zaprojektowane narzędzia osadzone w świadomej metodyce, z jasnymi regułami użycia. Priorytetami na najbliższe lata powinien być rozwój wiarygodnych, kontekstowo wrażliwych systemów adaptacyjnych, specjalizowane modele generatywne gwarantujące poprawność merytoryczną, stan-

dardy etyczne i audytowalność algorytmów, otwarte, zróżnicowane zbiory danych oraz systemowe wsparcie kształcenia nauczycieli. Dopiero w takim układzie AI stanie się naturalnym przedłużeniem matematycznego myślenia i narzędziem, które porządkuje dane, przyspiesza analizę i pomaga trafniej projektować doświadczenia dydaktyczne, pozostawiając człowiekowi to, co w nauczaniu najważniejsze, czyli sens, krytycyzm i odpowiedzialność.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Du Plooy E., Casteleijn D., Franzsen D.: Personalized Adaptive Learning in Higher Education: A Scoping Review of Key Characteristics and Impact on Academic Performance and Engagement, *Heliyon*, Vol. 10, 2024, e39630.
2. Awang L. A., Yusop F. D., Danaee M.: Current Practices and Future Direction of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Systematic Review, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. 20(2), 2025, em0823.
3. Panqueban D., Huincahue J.: Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Systematic Review, *Uniciencia*, Vol. 38(1), 2024, s. 1–17.
4. Hwang G.-J., Tu Y.-F.: Roles and Research Trends of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Bibliometric Mapping Analysis and Systematic Review, *Mathematics*, Vol. 9(6), 2021, 584.
5. Baytas C., Ruediger D.: Making AI Generative for Higher Education: Adoption and Challenges Among Instructors and Researchers, *Ithaka S+R*, Nowy Jork 2025.
6. Mustafa A. N.: The Future of Mathematics Education: Adaptive Learning Technologies and Artificial Intelligence, *International Journal of Science and Research Archive*, Vol. 12(1), 2024, s. 2594–2599.
7. Garzón J., Patiño E., Marulanda C.: Systematic Review of Artificial Intelligence in Education: Trends, Benefits, and Challenges, *Multimodal Technologies and Interaction*, Vol. 9(8), 2025, 84.
8. Mohamed Z. M. B., Hidayat R., Suhaizi N. N. B. i inni : Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Systematic Literature Review, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. 17(3), 2022, em0694.

MATHEMATICS IN THE AGE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE: CHALLENGES AND DIDACTIC OPPORTUNITIES

The article presents a synthetic review of the applications, challenges, and future directions of artificial intelligence in mathematics education at the academic level. Based on recent literature, it discusses the main areas of AI implementation: Intelligent Tutoring Systems, Adaptive Learning Systems, generative language models, learning analytics, and technologies involving robotics and AR/VR. The paper highlights how these tools support personalized learning, diagnosis of difficulties, and the construction of individualized mathematical learning paths. Key implementation challenges are identified, including teacher preparedness, data quality and bias, algorithm transparency, privacy protection, reliability of generative content, as well as linguistic, cultural, and organizational factors. The study proposes several recommendations: the development of context-sensitive adaptive systems, specialized generative models ensuring mathematical accuracy, ethical and transparent standards for AI use, the creation of open educational data repositories, and systematic training in teachers' digital and critical competences. The conclusion emphasizes a symbiotic model in which AI extends the capabilities of teachers and students, while its effective use requires informed pedagogy, transparency, and responsible data governance.

Keywords: artificial intelligence, mathematics education, didactic innovations

OD WYKŁADU DO DOŚWIADCZENIA – JAK PRZEJŚĆ OD TRADYCYJNEJ DYDAKTYKI DO MODELU LEARNING BY DOING

Tomasz DRWIEGA

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Matematyki Stosowanej
tel.: 12 617 40 22 e-mail: drwiega@agh.edu.pl

Streszczenie: Artykuł proponuje wykonalny model przejścia od wykładu do *learning by doing* na studiach matematycznych. Rdzeń stanowi czteroetapowy rytm (przygotowanie-badanie-formalizacja-refleksja) i proste procedury jakości: jawne założenia, testy lokalne i kontrprzykłady, kontrola przypadków brzegowych oraz krótki audyt szkicu. Pokazujemy, jak wyznaczać „minimalne jądro” treści, organizować rytm tygodnia oraz oceniać zarówno proces, jak i produkt. Studium $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ ilustruje drogę od eksperymentu do twierdzenia o zachowaniu ciągłości granicy przy zbieżności jednostajnej. Całość domyka plan wdrożenia (pilotaż - rozszerzenie - standaryzacja) oraz zestaw mierników skuteczności, obejmujących transfer pojęć, wskaźniki procesowe oraz trwałość efektów.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, przykłady oraz kontrprzykłady w nauczaniu, uczenie doświadczeniowe.

1. WPROWADZENIE

Dominujący przez dekady model akademickiej dydaktyki matematyki opierał się na wykładzie porządkującym wiedzę oraz demonstrującym standardy dowodzenia. Choć skutecznie przekazuje kanon pojęć i technik, często nie rozwija sprawczości poznawczej: formułowania problemów, doboru narzędzi, konstruowania i testowania hipotez oraz iteracyjnego dochodzenia do rozwiązań. Model *learning by doing* traktuje uczenie jako działanie w zadaniach, projektach i doświadczeniach, gdzie teoria staje się użytecznym narzędziem (zob. [2, 4, 5, 6]). Celem artykułu jest przedstawienie realnej, osadzonej w praktyce ścieżki przejścia do tego podejścia z zachowaniem rygoru i troską o dobrostan studentów oraz prowadzących.

Zmiana nie polega na porzuceniu wykładu, lecz na redefinicji jego roli: to krótka, precyzyjna interwencja ramująca temat, język i minimalne przykłady. Rdzeniem procesu są pracownie, projekty, laboratoria i zadania otwarte, w których studenci konstruują rozwiązania, testują je, a następnie wraz z prowadzącym destylują uogólnienia oraz formalne stwierdzenia. Uczymy nie tylko „co” i „jak”, ale przede wszystkim „dlaczego”, zbliżając dydaktykę do praktyki matematyki jako budowania modeli, dowodów oraz kryteriów adekwatności.

2. OD WYKŁADU DO DZIAŁANIA

W dyscyplinach empirycznych działanie oznacza eksperyment w laboratorium lub w terenie. W matematyce również eksperymentujemy, choć naszym „materiałem” są obiekty formalne, przykłady i kontrprzykłady, obliczenia

symboliczne i numeryczne, małe modele oraz dowodowe szkice. *Learning by doing* oznacza tu projektowanie sytuacji, w których student konstruuje, bada i modyfikuje obiekty matematyczne, formułuje hipotezy, testuje graniczne przypadki, a następnie przechodzi od intuicyjnego wglądu do formalnego uzasadnienia. Jest to proces pętli: wypróbowanie pomysłu - analiza wyniku - uogólnienie - próba formalizacji - testy brzegowe - korekta planu - kolejna iteracja. Rolą prowadzącego jest nadanie strukturze zadania sensu i skali, zapewnienie odpowiednich narzędzi, a na końcu pomoc w destylacji powstałych rozumień do zwięzłych definicji, twierdzeń i dowodów.

Kluczową cechą tego podejścia jest wielogłosowość oraz publiczność myślenia. Zamiast jednego głosu wykładowcy słyszymy głosy zespołów, które prezentują ścieżki, tłumaczą motywacje wyborów i ujawniają miejsca niepewności. Dzięki temu studenci uczą się nie tylko od nauczyciela, ale i od siebie, a nauczyciel zyskuje wgląd w procesy poznawcze grupy. W takiej grupie bardziej naturalna staje się praca nad „niedomkniętymi” artefaktami: szkicami, półproduktami, cząstkowymi wnioskami, które dopiero wspólnie są porządkowane i formalizowane.

W epoce popularyzacji generatywnych modeli językowych student dysponuje narzędziem, które potrafi wygenerować pozornie spójny „dowód” albo wykonać rutynowy rachunek. Jeśli dydaktyka sprowadza się do reprodukcji takich wyjść, traci przewagę. Zyskuje ją wtedy, gdy zadania wymagają krytycznej oceny, planowania eksperymentu matematycznego, weryfikacji hipotez oraz umiejętności formalizacji. To wszystko mieści się w paradygmacie *learning by doing*.

3. PROJEKTOWANIE KURSU

3.1. Architektura

Transformacja kursu może przebiegać stopniowo, ale wymaga przemyślanej architektury. Punktem wyjścia jest mapa celów: wskazujemy pojęcia węzłowe, ich zależności oraz funkcje w programie. Dla każdego projektujemy minimalny zestaw aktywności, w których „ujawnia się jego moc”: zadanie modelujące realny problem, krótkie laboratorium, mini-projekt w parach, sesję kontrprzykładów czy warsztat dowodowy. Następnie planujemy mikrowykłady jako krótkie, precyzyjne wstawki wprowadzające oraz podsumowujące i spleatamy aktywności w spójny rytm tygodnia.

Dobrym wzorcem jest sekwencja czterech faz: przygotowanie, eksploracja, formalizacja, refleksja. Materiał

przygotowawczy (tekst/notatnik/wideo do 10 min) nakreśla kontekst: pytanie, język, narzędzia. W eksploracji zespoły konstruuja obiekty, testują hipotezy i gromadzą przykłady. W formalizacji porządkujemy wybraną ścieżkę w szkic dowodu i w razie potrzeby domykamy brakujące kroki, doprecyzowując założenia oraz argumenty. Refleksja destyluje „lekcję z lekcji”: co zadziało, gdzie były pułapki, które definicje okazały się kluczowe. Taki rytm wzmacnia sprawczość studentów i rozwija świadomość własnego uczenia się.

Ilustracyjnie, w analizie „polowanie na definicję” czyli np. zbieżność ciągów generowanych iteracjami i konfrontacja z klasycznymi twierdzeniami; w algebrze liniowej to np. różne bazy przestrzeni wielomianów i wpływ zmiany bazy na reprezentację; w kombinatoryce to np. kontrast między argumentem iniekcyjnym i bijekcyjnym oraz „skoki o rząd wielkości” przy drobnych modyfikacjach liczenia.

W każdym module planujemy moment „zderzenia z formalizmem” tzn. czy szkic się domyka? czy założenia są jawne i wystarczające? czy rozumowanie przechodzi test przypadków brzegowych? Takie pytania kształtują nawyk sprawdzania; krótkie, dobrze dobrane interwencje potrafią wyraźnie zmienić sposób pracy grupy.

Transformację rozkładamy na trzy etapy. Pilotaż, to kilka modułów z pełnymi sekwencjami doświadczeń, mikrowykładami i oceną uwzględniającą proces. W etapie rozszerzenia rozwijamy ćwiczenia w doprecyzowywaniu rozumowań oraz testach brzegowych, budowa banku kontrprzykładów. Etapem standaryzacji domykamy architekturę, ujednolicamy rubryki oraz wewnętrzną ewaluację. Na każdym etapie gromadzimy artefakty, logi, opinie studentów i wyniki zadań transferowych zarówno do doskonalenia kursu, jak i rozliczania pracy zespołu.

Nie warto robić wszystkiego naraz. Kluczowe jest minimalne jądro pojęć i twierdzeń, które studenci mają „wziąć w ręce i poczuć”. Ono wyznacza priorytety. Treści uzupełniające umieszczamy w materiałach referencyjnych, zakładając, że nie muszą być przepracowane w trybie *doing*, o ile studenci potrafią je rozpoznać i zastosować. Dzięki temu zachowujemy głębię bez rozsadzania siatki godzin.

Poniższe studium przypadku pokazuje, jak opisana architektura przekłada się na konkretne doświadczenie: od badania $f_n(x) = x^n$ po formalny wniosek o ciągłość granicy przy zbieżności jednostajnej.

3.2. Studium przypadku: zbieżność ciągów funkcyjnych a ciągłość funkcji

Niech $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dane przez $f_n(x) = x^n$. Student najpierw obserwuje zachowanie tego ciągu funkcji na wykresach albo po prostu „w głowie”: dla ustalonego $x \in [0, 1)$ potęgi x^n maleją do zera, natomiast dla $x = 1$ mamy $f_n(1) = 1$ dla dowolnego n . Granica punktowa istnieje i ma postać

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Jest to funkcja nieciągła w punkcie $x = 1$. Zauważamy więc pierwszy wniosek: ciąg funkcji ciągłych może zbiegać punktowo do funkcji nieciągłej. Ta obserwacja prowokuje naturalne pytanie badawcze: jaka dodatkowa własność zbieżności „chroni” ciągłość w granicy?

Teraz student testuje hipotezę o zbieżności jednostajnej. Intuicyjnie, gdyby $f_n \rightarrow f$ jednostajnie, to „cały wykres” f_n wszędzie naraz zbliżałby się do wykresu f . W naszym

przykładzie różnica $|f_n(x) - f(x)|$ dla $x < 1$ wynosi x^n , a gdy $x = 1$ to równa się 0. Maksimum tej różnicy po wszystkich $x \in [0, 1]$ jest równe 1, choć nie osiąga się go w punkcie $x = 1$, bo dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można wziąć x tak bliskie 1, że $x^n > 1 - \varepsilon$. To pokazuje, że

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

dla dowolnego n , a zatem zbieżność nie jest jednostajna. Mamy więc kontrprzykład do tezy „zbieżność punktowa zachowuje ciągłość”.

Aby wyostrzyć intuicję, student modyfikuje obiekt. Jeśli ograniczymy dziedzinę do przedziału $[0, a]$ z dowolnym $a < 1$, to dla wszystkich $x \in [0, a]$ mamy

$$|f_n(x) - 0| = x^n \leq a^n,$$

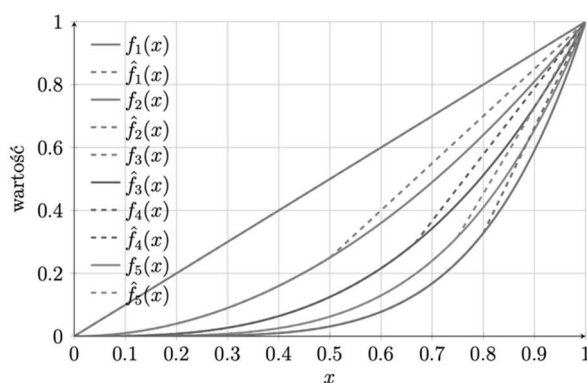
a stąd

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)| \leq a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Na każdym zwartym podprzedziale $[0, a] \subset [0, 1)$ zbieżność jest już jednostajna. Empiryczny wniosek brzmi: „problem” leży przy granicy przedziału tam, gdzie funkcja graniczna ma skok. To podsuwa dwie hipotezy. Po pierwsze, zbieżność jednostajna powinna gwarantować ciągłość granicy. Po drugie, w przypadku przedziałów zwartych, przy pewnych dodatkowych warunkach, sekwencje „ładnych” funkcji częściej zbliżają się do granicy w sposób jednostajny.

Zanim przejdziemy do dowodu, warto przećwiczyć jeszcze jedną modyfikację. Zdefiniujmy nowy ciąg $\hat{f}_n$ na $[0, 1]$ przez

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{gdy } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ x^n + \left(x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}, & \text{gdy } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$



Rys. 1. Funkcje f_n oraz $\hat{f}_n$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Wówczas $\hat{f}_n$ jest ciągła oraz $\hat{f}_n(1) = 1$ (por. rys. 1.). Wartości $\hat{f}_n(x)$ dla $x < 1$ są wciąż „praktycznie” x^n i dążą do zera, ale w wąskim otoczeniu punktu 1 funkcja została „podciągnięta” tak, aby dla $x = 1$ zawsze równała się 1. Łatwo sprawdzić, że punktowa granica nadal jest funkcją skokową f jak wyżej, a zbieżność nie jest jednostajna, bo supremum różnicy znów pozostaje bliskie 1. Modyfikacja pokazuje, że sama gładka „naprawa końcówki” bez

dodatkowego warunku nie wystarczy do uzyskania zbieżności jednostajnej.

Po tej fazie eksperymentów student formułuje centralną hipotezę: jeśli ciąg funkcji ciągłych f_n zbiega jednostajnie do f , to f również jest ciągła. To twierdzenie jest klasyczne, ale teraz ma naturalną motywację empiryczną. Przechodzimy do formalnego uzasadnienia.

Twierdzenie 1. *Jeśli $E \subset \mathbb{R}$, każda funkcja $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in E$, a f_n zbiega jednostajnie na E do f , to f jest ciągła w x_0 .*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne. Ze zbieżności jednostajnej istnieje takie N , że dla dowolnego $n \geq N$ i dowolnego $x \in E$ zachodzi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z ciągłości f_N w punkcie x_0 istnieje takie $\delta > 0$, że $|x - x_0| < \delta$ mamy

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wtedy dla $|x - x_0| < \delta$ otrzymujemy

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ponieważ ε było dowolne, mamy, że funkcja f jest ciągła w x_0 .

Warto domknąć pętlę jeszcze jedną obserwacją, która pogłębia wyniki. Jeśli dodatkowo wiemy, że każda f_n jest ciągła na przedziale zwartym i f_n maleje punktowo do ciągłej funkcji f , to zbieżność jest w istocie jednostajna (twierdzenie Diniego). Ten fakt, choć jest silniejszy i wymaga innego dowodu, student może potraktować jako kolejne zaproszenie do eksperymentów: zaobserwować, że na wykresach sekwencje monotoniczne „przyklejają się” do granicy równomiernie. Tym razem jednak formalne uzasadnienie wykracza poza nasz mini-warsztat.

Na koniec wracamy do idei *learning by doing*. W ćwiczeniu student sam zbudował przykłady oraz kontrprzykłady, sprawdził graniczne przypadki na podprzedziałach $[0, a]$, zmodyfikował funkcję w pobliżu punktu krytycznego i zobaczył, że to nie zmienia natury zbieżności. Eksperymenty doprowadziły do hipotezy o roli zbieżności jednostajnej, a ta została domknięta klasycznym, krótkim dowodem. Dzięki temu droga od intuicji do rygoru była spójna: najpierw obserwacje oraz konstrukcje, potem trafne pytanie, wreszcie formalna odpowiedź wraz z uświadomieniem sobie granic twierdzenia.

3.3. Przykładowy tydzień zajęć

Przykładowy tydzień (twierdzenie o wartości średniej): krótki materiał startowy z pytaniem „kiedy istnieje punkt, w którym chwilowa prędkość równa się średniej?”. Na zajęciach zespoły projektują funkcję spełniającą warunki i funkcję je naruszającą, badając skutki braku ciągłości lub różniczkowości. Z obserwacji formułują hipotezy i ich interpretacje geometryczne. W formalizacji porządkujemy wnioski w szkic dowodu na bazie własności funkcji ciągłych na przedziale domkniętym, a brakujące elementy domykamy pytaniami kontrolnymi. Refleksja rozdziela intuicję od kręgosłupa dowodu i prowadzi do kolejnej części o standardach rygoru i ich egzekwowaniu.

4. RYGOR I NARZĘDZIA

Jedną z częstych obaw przy przejściu do modelu doświadczeniowego jest rzekoma utrata rygoru. Tymczasem rygor nie oznacza „czasochłonnych wyprowadzeń”, lecz spełnianie jawnych standardów uzasadniania i weryfikacji. W praktyce to trzy zasady: każde twierdzenie robocze, nawet szkic, ma określony status i ścieżkę sprawdzenia (test lokalny, kontrprzykład, odwołanie do lematu, ewentualnie formalizacja); każda definicja pojawia się w kontekście problemu z jasno zaznaczonym zakresem; kontrprzykład traktujemy jako pełnoprawny wynik. Reguły te przesuwają akcent z „oglądania gotowych konstrukcji” na „praktykowanie kryteriów jakości”.

Utrzymanie rygoru opiera się na prostych, powtarzalnych procedurach: szkic poprzedza się jawnym celem oraz listą założeń, a kończy krótkim audytem (testy lokalne, kontrprzykłady, przypadki brzegowe, wskazanie „skoków” w rozumowaniu, doprecyzowanie miejsc wymagających definicji lub lematu). Zadania projektuje się tak, by wymagały adaptacji ogólnych pomysłów do danych, jawnej ścieżki weryfikacji i dokumentowania decyzji – wartość powstaje w procesie, nie w samym tekście rozwiązania. Narzędzia pomocnicze mogą pełnić rolę „lustra” dla tych procedur, lecz nie zastępują rozumowania. To właśnie testy, kontrprzykłady, jawność założeń i audyt kroków gwarantują, że rozwiązania pozostają zrozumiałe, sprawdzalne oraz odporne na błędy. Ponieważ standardy działają w realnych zespołach, w dalszej części koncentrujemy się na komunikacji, rolach, dobrostanie oraz równych warunkach uczestnictwa.

5. PRACA Z LUDŹMI: KOMUNIKACJA, WSPÓŁPRACA, DOBROSTAN I RÓWNE WARUNKI UCZESTNICTWA

W modelu doświadczeniowym kluczowy jest język. Prowadzący powinien konsekwentnie używać czasowników wskazujących na czynności intelektualne: konstruuj, testuj, uzasadnij, zdiagnozuj, sformalizuj, porównaj, zdecyduj. Na poziomie pojęć należy dbać o klarowność definicji oraz o odróżnianie „intuicji roboczej” od „definicji formalnej”. Dobrą praktyką jest tworzenie wspólnych glosariuszy, do których studenci dopisują własne przykłady i kontrprzykłady ilustrujące pojęcia. Wgląd w taki glosariusz pełni zarazem funkcję diagnostyczną: pozwala zobaczyć, które definicje stały się narzędziami pracy, a które pozostały martwymi formułami.

Zespołowość bywa wymagająca, ale dobrze zaprojektowana staje się źródłem realnej synergii. Warto z góry zdefiniować role (inżynier przykładu, architekt szkicu, audytor testów, formalizator) oraz rotować je, aby każdy doświadczył różnych perspektyw. Odpowiedzialność indywidualną zabezpieczają krótkie, samodzielne „punkty kontrolne”: mini-eseje, w których student raportuje decyzje zespołu oraz własny wkład. Dzięki temu ocena potrafi uchwycić zarówno efekt pracy grupowej, jak i rozwój jednostki.

Model oparty na doświadczeniu może, paradoksalnie, obniżać stres, o ile projektujemy go z myślą o bezpieczeństwie poznawczym: błędy są oczekiwane oraz produktywnie, a ocena premiuje postęp i jakość procesu. Trzeba jednak dbać o obciążenie poznawcze. Zadania warto porcjować, przewidywać okresy „zwolnienia tempa”, a w pracy zespołowej pilnować równego dostępu do ról. Dla studentów o różnych stylach uczenia się dobrze jest oferować

zróznicowane ścieżki: tekst, obraz, doświadczenie, formalizm. Równe warunki uczestnictwa dotyczą także narzędzi: materiały powinny być dostępne bez barier technologicznych, a wymagania sprzętowe – racjonalne.

Dobrostan prowadzących wymaga urealnienia nakładu pracy. Projektowanie zadań oraz udzielanie feedbacku są czasochłonne, dlatego kurs powinien zawierać elementy możliwe do automatyzacji (szablony, półautomatyczne komentarze, banki zadań), a także przewidywać ich współdzielenie w zespole. Harmonogram kursu warto ułożyć tak, by rozkładać „piki pracy” i rezerwować czas na kalibrację, modyfikacje oraz podsumowania.

W tradycyjnym modelu prowadzący jest przede wszystkim nadawcą treści i strażnikiem poprawności. W modelu doświadczeniowym staje się projektantem sytuacji dydaktycznych, moderatorem dyskusji, architektem informacji zwrotnej oraz kustoszem standardów. Kompetencje przesuwają się z „biegłości w prezentacji” na „biegłość w projektowaniu zadań i prowadzeniu procesu”. Nie oznacza to utraty znaczenia umiejętności wykładowych, lecz ich uzupełnienia o narzędzia pracy z niepewnością i różnorodnością ścieżek. Te kompetencje można rozwijać w zespołach przedmiotowych poprzez wspólne planowanie modułów, wzajemne obserwacje, kalibrację oceniania i wymianę gotowych scenariuszy.

W początkowej fazie transformacji warto wybrać kilka „kotwic” – tematów, które szczególnie dobrze znoszą podejście doświadczeniowe oraz budują zaufanie studentów. Mogą to być treści naturalnie eksperymentalne (np. liczenie kombinatoryczne metodami bijekcji i metodami opartymi na niezmiennikach), moduły wymagające wizualizacji (geometria analityczna) albo elementy programu, w których kontrprzykład odgrywa pierwszoplanową rolę (topologia elementarna).

6. OCENA I EWALUACJA

Ocena w modelu doświadczeniowym wymaga redefinicji (zob. [1]). Sama punktacja „wyniku” nie uchwyci wartości procesu: decyzji, testów, poprawek i jakości szkicu. Dlatego stosujemy system komponentów: wkład procesowy (dzienniki, logi, komentarze o własnym uczeniu się), artefakty pośrednie (szkice, prototypy dowodów), produkty końcowe (rozwiązania, formalizacje) oraz progi opanowania. Student ma wielokrotne próby, a ocena zależy od postępu oraz jakości finału, nie od pierwszego podejścia.

Informacja zwrotna powinna być szybka i konkretna. Zamiast uwagi „niejasne” używamy oznaczeń typowych błędów (brak bazy indukcji, przeskok w rozumowaniu, niejawne założenie, błąd kwantyfikacji), umieszczanych w miejscu problemu oraz odsyłających do materiału wyjaśniającego. Pomagają krótkie konsultacje w małych grupach po każdej fazie badania: prowadzący nie podaje rozwiązań, tylko dopytuje o motywy oraz proponuje minimalne testy rozstrzygające.

Opór pojawia się po obu stronach: studenci boją się „chaosu”, a prowadzący utraty kontroli. Przeciwsrodkiem są rytuały: stała sekwencja faz, jasne kryteria, przejrzysty obieg materiałów oraz „kontrakt dydaktyczny” (cele, praktyki, standardy, polityka błędów oraz popraw). W treściach

trzymamy się minimalnego jądra: lepiej mniej, ale naprawdę przepracowane.

Infrastruktura też ma znaczenie: bez przestrzeni do pracy zespołowej, tablic oraz prostych środków organizacji materiałów najlepszy scenariusz traci impet. Transformację zaczynamy od poprawy warunków brzegowych (np. mobilne tablice, dostępne repozytoria).

Ewaluacja nie może kończyć się na satysfakcji studentów (zob. [3,4]). Potrzebne są wskaźniki: konceptualne (transfer pojęć), procesowe (liczba iteracji do poprawnego szkicu, testy brzegowe), formalizacyjne (odsetek zadań domkniętych formalnie) oraz długofalowe (utrzymanie umiejętności).

Warto też badać kalibrację zaufania do narzędzi. Jeżeli studenci bezrefleksyjnie akceptują wyniki systemów (np. generatywnej sztucznej inteligencji), model zawiódł. Jeśli natomiast potrafią używać narzędzi jako źródeł hipotez oraz testów, a jednocześnie eliminują błędy poprzez kontrprzykłady i formalizację, mamy do czynienia z dojrzałą praktyką. Zebrane wskaźniki i doświadczenia składają się na praktyczne wnioski na przyszłość, które podsumowujemy w zakończeniu.

7. PODSUMOWANIE

Przejsie od wykładu do doświadczenia nie jest rewolucją jednego semestru, lecz zmianą praktyk wymagającą odwagi, planu oraz wspólnoty. Traktowane jako inwestycja w sprawczość intelektualną studentów przynosi wielowymiarowe korzyści: głębsze rozumienie pojęć, lepsze dowodzenie, większą odporność na błędy oraz silniejsze poczucie sensu nauki. Matematyka rozkwita w dydaktyce, gdy staje się rzemiosłem budowania argumentów, modeli oraz definicji „na oczach” uczących się. Tę zmianę możemy zapoczątkować już dziś, od jednego modułu, jednej sekwencji, jednego tygodnia, by w kolejnych iteracjach dojść do kursu, w którym doświadczenie prowadzi, a wykład nadaje mu jasność oraz kierunek.

8. BIBLIOGRAFIA

1. Black P., Wiliam D.: Assessment and classroom learning. *Assessment in Education* , 5(1):7-74, 1998.
2. Chi M.T.H., Wylie R.: The ICAP Framework: Linking cognitive engagement to active learning outcomes. *Educational Psychologist* , 49(4):219-243, 2014.
3. Deslauriers L., McCarty L. S., Miller K., Callaghan K., Kestin G.: Measuring actual learning versus feeling of learning in response to being actively engaged in the classroom. *PNAS*, 116(39):19251-19257, 2019.
4. Freeman S., Eddy S. L., McDonough M., Smith M. K., Okoroafor N., Jordt H., Wenderoth M. P.: Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *PNAS*, 111(23):8410-8415, 2014.
5. Hake R. R.: Interactive-engagement vs traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data. *American Journal of Physics* , 66(1):64-74, 1998.
6. Prince M.: Does Active Learning Work? A Review of the Research. *Journal of Engineering Education* , 93(3):223-231, 2004.

FROM LECTURE TO EXPERIENCE: SHIFTING FROM TRADITIONAL TEACHING TO A LEARNING-BY-DOING MODEL

The article proposes a feasible model for transitioning from traditional lectures to learning by doing in university-level mathematics. Its core is a four-stage cycle (preparation – exploration – formalization – reflection) supported by simple quality procedures: explicit assumptions, local tests and counterexamples, boundary-case checks, and a short audit of the solution sketch. We show how to identify the “minimal core” of the content, organize the weekly rhythm, and assess both the process and the product. The case study $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$ illustrates the path from experiment to the theorem on the preservation of continuity under uniform convergence. The article concludes with an implementation plan (pilot – expansion – standardization) and a set of effectiveness metrics, including concept transfer, process indicators, and the durability of learning outcomes.

Keywords: mathematics education, examples and counterexamples in teaching, experience-based learning.

MIEDZY KODEM A ZAUFANIEM: TRANSFORMACJA DYDAKTYKI MATEMATYKI W ERZE AI NA UNIWERSYTETACH TECHNICZNYCH

Anita DĄBROWICZ-TLAŁKA¹, Magdalena M. MUSIELAK²

Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki

1. e-mail: anita@pg.edu.pl

2. e-mail: magmusie@pg.edu.pl

Streszczenie: Niniejszy artykuł analizuje przyszłość dydaktyki matematyki na uniwersytetach technicznych w kontekście dynamicznego rozwoju sztucznej inteligencji. Na podstawie badań własnych przeprowadzonych wśród ponad 500 studentów pierwszego semestru Politechniki Gdańskiej oraz przeglądu najnowszych badań międzynarodowych, przedstawiono obraz obecnego stanu wykorzystania AI przez studentów, ich oczekiwania wobec nauczycieli oraz prognozy dotyczące transformacji edukacji matematycznej do roku 2035. Szczególną uwagę poświęcono budowaniu relacji edukacyjnych w środowisku zdominowanym przez technologię, analizując zarówno doświadczenia krajów przodujących w implementacji AI (Chiny), jak i implikacje dla europejskich uniwersytetów technicznych. Artykuł proponuje model integracji AI z tradycyjną dydaktyką, podkreślając niezbędność zachowania jakościowych interakcji między nauczycielem a studentem.

Słowa kluczowe: sztuczna inteligencja, dydaktyka matematyki, edukacja akademicka, relacja nauczyciel–student, personalizacja uczenia się, uniwersytet techniczny, ChatGPT, systemy tutorskie.

1. WPROWADZENIE

Sztuczna inteligencja fundamentalnie przekształca krajobraz edukacji wyższej. Analiza bibliometryczna badań nad AI w edukacji matematycznej wykazuje znaczący wzrost liczby publikacji w okresie 2020–2025, ze szczególnym nasileniem po roku 2022 — momencie upowszechnienia ChatGPT. Generatywne modele AI, inteligentne systemy tutorskie oraz platformy adaptacyjnego uczenia się stają się nieodłącznym elementem ekosystemu edukacyjnego [1]. Prognozy rynkowe wskazują, że wartość sektora technologii AI w edukacji wzrośnie z 7,57 miliarda dolarów w 2025 roku do ponad 112 miliardów dolarów w 2034 roku [2-4].

Ta technologiczna transformacja stawia przed nauczycielami akademickimi matematyki fundamentalne pytania: jak przygotować studentów do świata zdominowanego przez AI, zachowując jednocześnie głębię matematycznego rozumowania i unikalną wartość relacji edukacyjnych?

2. BADANIA WŁASNE: STUDENCI POLITECHNIKI WOBEC AI

2.1. Metodologia i charakterystyka badania

Badanie ankietowe przeprowadzono w semestrze zimowym roku akademickiego 2025/2026 wśród ponad 500 studentów pierwszego semestru studiów inżynierskich na

Politechnice Gdańskiej. Celem badania było zdiagnozowanie poziomu adopcji narzędzi AI oraz postaw studentów wobec ich wykorzystania w procesie dydaktycznym. Przeprowadzona ankieta była bardzo obszerna. W tym artykule wykorzystane zostały jedynie dane, mające bezpośredni związek z prognozami zmian, jakie według autorek mogą zajść w edukacji matematycznej w najbliższych latach

2.2. Kluczowe wyniki

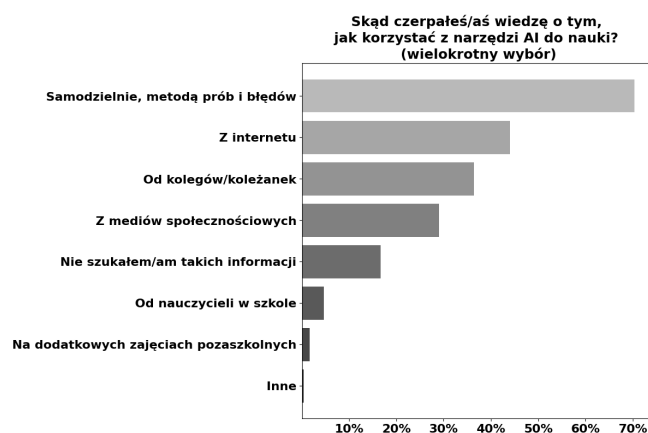
Powszechność i moment adaptacji. Wyniki wskazują na powszechną adopcję technologii jeszcze przed rozpoczęciem edukacji akademickiej. Zdecydowana większość studentów (86,5%) zaczęła korzystać z narzędzi AI do nauki przed rozpoczęciem studiów. Dla porównania, w analogicznej ankiecie z roku akademickiego 2024/2025 odsetek ten wynosił około 50%. Jedynie 5,3% badanych zadeklarowało brak doświadczenia z AI w celach edukacyjnych, a 8,2% zaczęło korzystać z tych narzędzi na studiach (rys. 1).



Rys. 1. Moment rozpoczęcia korzystania z narzędzi AI do nauki wśród studentów pierwszego semestru (n > 500)

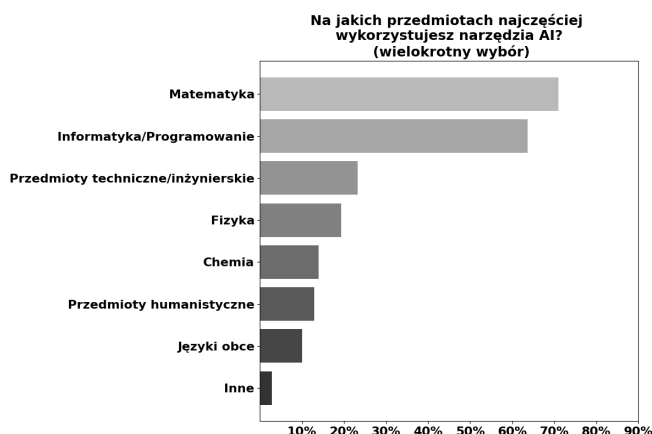
Luka kompetencyjna w edukacji formalnej. Niezwykle istotnym wnioskiem jest źródło kompetencji cyfrowych studentów. Nauka korzystania z AI odbywa się

głównie metodą prób i błędów (ok. 70% wskazań) oraz poprzez zasoby internetowe (46%) i grupy rówieśnicze (38%). Alarmujący jest fakt, że zaledwie 6% studentów wskazało nauczycieli szkolnych jako źródło wiedzy o AI. Sugeruje to systemowe nieprzygotowanie kadry dydaktycznej do wprowadzania uczniów w świat sztucznej inteligencji.



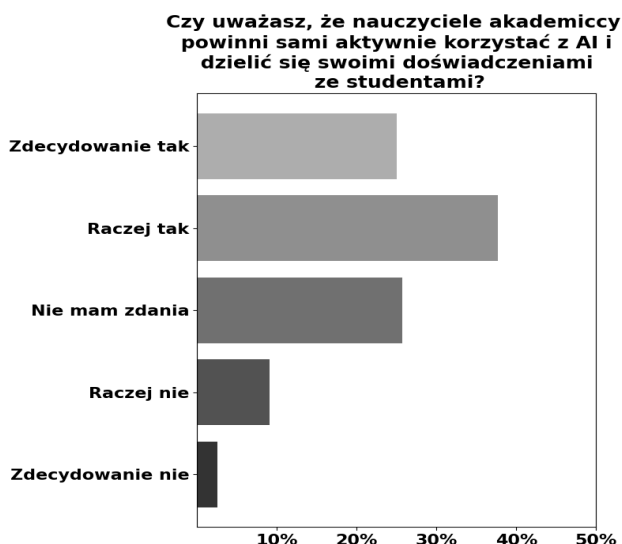
Rys. 2. Wynik ankiety dot. źródła wiedzy o korzystaniu z AI

Dominacja matematyki. Wbrew stereotypom łączącym AI głównie z programowaniem, to matematyka zajmuje pierwsze miejsce wśród przedmiotów, na których studenci najczęściej sięgają po wsparcie algorytmów (71% wskazań). Wyprzedza ona informatykę (63%), przedmioty techniczne (27%) oraz fizykę (22%). Wynik ten nakłada szczególną odpowiedzialność na wykładowców przedmiotów matematycznych.



Rys. 3. Wynik ankiety dot. przedmiotów na których studenci wykorzystują AI

Oczekiwania wobec kadry akademickiej. Studenci wyrażają silną potrzebę, aby nauczyciele akademicki nie ignorowali cyfrowej rzeczywistości. Łącznie 64% badanych uważa ("zdecydowanie tak" i "raczej tak"), że wykładowcy powinni aktywnie korzystać z AI i dzielić się swoimi doświadczeniami. Sprzeciw wobec takiej postawy wyraziło jedynie 14% respondentów.



Rys. 4. Wynik ankiety dot. oczekiwań wobec nauczycieli

3. TRANSFORMACJA GLOBALNA: LEKCJA Z CHIN

Podczas gdy polscy studenci uczą się AI "na własną rękę", Chiny stanowią przykład państwa strategicznie integrującego tę technologię z systemem edukacji [5]. W kwietniu 2025 roku Ministerstwo Edukacji ChRL wydało wytyczne promujące reformy „AI+ edukacja”, kładące nacisk na rozwój krytycznego myślenia i kompetencji cyfrowych [6].

Na chińskich uniwersytetach obserwuje się trendy, które mogą wyznaczać kierunek dla uczelni europejskich:

- **Powszechność użycia:** Według Mycos Institute, blisko 60% studentów i wykładowców korzysta z AI codziennie lub kilka razy w tygodniu, a jedynie 1% deklaruje, że nigdy nie korzystało z narzędzi AI [7].
- **Edukacja systemowa:** Uniwersytet Zhejiang wprowadził obowiązkowy kurs wprowadzający do AI dla wszystkich studentów studiów licencjackich, a Beijing Normal University uruchomił pierwszy w Chinach kierunek licencjacki „AI w edukacji” [8]. Czołowe uniwersytety (Tsinghua, Renmin, Fudan, Nanjing) uruchamiają kursy i programy dyplomowe z AI, dostępne dla studentów wszystkich kierunków.
- **Zmiana paradygmatu:** Podejście chińskie traktuje AI nie jako zagrożenie dla integralności akademickiej, lecz jako kluczową kompetencję do opanowania – „umiejętność komunikacji z maszynami jest jedną z najważniejszych umiejętności współczesnego społeczeństwa” [9].

4. RELACJA NAUCZYCIEL – STUDENT W ERZE AI

4.1. Wyzwania: Od "Ja-Ty" do "Ja-To"

Wprowadzenie zaawansowanej technologii niesie ryzyko obiektywizacji procesu nauczania. Istnieje obawa przesunięcia relacji z opartego na dialogu modelu „Ja-Ty” (w ujęciu Martina Bubera) w stronę zredukowanej relacji „Ja-To”. Główne zagrożenia obejmują zmniejszenie bezpośrednich interakcji emocjonalnych, nadmierne poleganie na technologii, problemy z przejrzystością algorytmów i zaufaniem oraz kwestie etyczne – aż 58% studentów przyznaje się do nieuczciwego wykorzystania AI do realizacji zadań [10].

4.2. Szanse: AI jako "kołowrotek pedagogiczny"

Paradoksalnie, AI może wzmocnić relacje edukacyjne poprzez automatyzację rutynowych zadań (np. oceniania), uwalniając czas na głębszy mentoring. Badania Stanford University nad narzędziem Tutor CoPilot wykazały, że systemy te mogą skutecznie wspierać tutorów, wyrównując poziom nauczania nawet u mniej doświadczonych pedagogów [11].

4.3. Model równowagi

Badania nad głębokim uczeniem się (deep learning) potwierdzają, że nawet w środowisku cyfrowym strategię nauczania i jakość interakcji pozostają kluczowe dla sukcesu studenta. Technologia pełni rolę medium, ale to nauczyciel projektuje doświadczenie edukacyjne.

5. PROGNOZY: DYDAKTYKA MATEMATYKI 2035

Opierając się na obecnych trendach, dydaktyka matematyki w nadchodzącej dekadzie ulegnie znaczącej ewolucji:

- **Systemy tutorskie nowej generacji:** Inteligentne systemy tutorskie (ITS), które już dziś podnoszą wyniki studentów o 15–25% na testach standaryzowanych oraz nawet o 100% na testach ukierunkowanych na specyficzne umiejętności rozwiązywania problemów algebraicznych, przekształca się w wieloagentowe platformy [12]. Będą one diagnozować luki w wiedzy w czasie rzeczywistym i generować spersonalizowane ścieżki nauki, integrując GenAI z narzędziami wizualizacji matematycznej [13].
- **Personalizacja masowa:** Platformy takie jak Khan Academy czy ALEKS pokazują, że adaptacja materiału odbywa się dwuetapowo: na podstawie wstępnego pomiaru cech ucznia oraz bieżącej analizy interakcji. Standardem stanie się nauczanie "szyte na miarę" w skali masowej [14].
- **Nowe kompetencje wykładowcy:** Rola nauczyciela przesunie się z „przekaziciela wiedzy” na projektanta środowisk uczenia się. Kluczowe staną się kompetencje krytycznej oceny AI, budowania autentycznych relacji (jako przeciwwagi dla maszyn) oraz kształtowania postaw etycznych [15], [16].

6. WNIOSKI I REKOMENDACJE

Przeprowadzona analiza pozwala sformułować trzy kluczowe wnioski dla kształtowania przyszłości dydaktyki matematyki na uczelniach technicznych:

1. **Konieczność aktywnej postawy kadry:** Studenci oczekują partnerstwa w poznawaniu narzędzi AI. Luka między oczekiwaniami studentów (64% zaangażowania nauczycieli) a rzeczywistością szkolną (tylko 6% wsparcia) musi zostać wypełniona na poziomie uniwersyteckim. Nauczyciele matematyki, jako przedmiotu najczęściej wspomaganego przez AI, stają na pierwszej linii tej zmiany [17].
2. **Technologia nie zastąpi relacji:** Badania empiryczne potwierdzają, że autentyczny dialog i strategię dydaktyczne nauczyciela są nadrzędne wobec narzędzi. AI powinna być traktowana jako system wspierający, a nie substytut mentora [18].
3. **Potrzeba podejścia systemowego:** Doświadczenia chińskie wskazują, że skuteczna integracja AI wymaga koordynacji na poziomie polityki uczelni, szkoleń kadry

i infrastruktury [19]. Optymalny model dydaktyki roku 2035 to synergia skalowalności AI z unikalnymi wartościami ludzkiego krytycznego myślenia i etyki.

7. BIBLIOGRAFIA

1. Da Tien Nguyen (2025) Artificial intelligence (AI) in mathematics education: Bibliometric analysis for the period 2020-2025, International Electronic Journal of Mathematics Education, 2025, 20(4), e-ISSN: 1306-3030, <https://www.iejme.com/download/artificial-intelligence-ai-in-mathematics-education-bibliometric-analysis-for-the-period-2020-2025-17182.pdf>
2. AI in Education Market Size, Share and Trends 2025 to 2034, Precedence Research <https://www.precedence-research.com/ai-in-education-market>, pobrano 25.11.2025
3. AI In Education Market Forecast to 2034 – For Business Leaders, Analysts, and Strategic Teams, <https://www.einpresswire.com/article/826894745/ai-in-education-market-forecast-to-2034-for-business-leaders-analysts-and-strategic-teams> (30.06.2025), pobrano: 25.09.2025
4. 20 Statistics on AI in Education to Guide Your Learning Strategy in 2025, <https://www.engageli.com/blog/ai-in-education-statistics> (11.11.2025), pobrano: 15.11.2025
5. China's approach to AI Education in Schools (Year 1-12), Department of Education, Australian Government, <https://www.education.gov.au/download/19495/chinas-approach-ai-education-primary-and-secondary-schools/41945/document/pdf>, pobrano: 30.11.2025
6. China's Ministry of Education. (2024). Guidance on Strengthening AI Education in Primary and Secondary Schools
7. MIT Technology Review. (2025). Chinese universities want students to use more AI, not less, <https://www.technologyreview.com/2025/07/28/1120747/chinese-universities-ai-use/>
8. Nir Kshetri, Artificial Intelligence in China's Education: Policy Agendas, Innovation Drivers, and Global Consequences, IT Professional, Sept.-Oct. 2025, pp. 18-23, vol. 27, DOI: 10.1109/MITP.2025.3608885, <https://www.computer.org/csdl/magazine/it/2025/05/11218250/2b9Tuwsg7aU>
9. Tan MJT, Maravilla NMAT. Shaping integrity: why generative artificial intelligence does not have to undermine education. Front. Artif. Intell. 2024;7:1471224. doi: 10.3389/frai.2024.1471224
10. Eaton, S.E. Global Trends in Education: Artificial Intelligence, Postplagiarism, and Future-focused Learning for 2025 and Beyond – 2024–2025 Werkbund Distinguished Research Lecture. Int J Educ Integr 21, 12 (2025). <https://doi.org/10.1007/s40979-025-00187-6>
11. Létourneau, A., Deslandes Martineau, M., Charland, P. et al. A systematic review of AI-driven intelligent tutoring systems (ITS) in K-12 education. npj Sci. Learn. 10, 29 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41539-025-00320-7>
12. Study: AI-Assisted Tutoring Boosts Students' Math Skills, <https://www.the74million.org/article/study-ai-assisted-tutoring-boosts-students-math-skills/>, pobrano: 15.11.2025
13. Holman, K., Marino, M., Vasquez, T., Taub, M., Hunt, J., & Tazi, Y. (2025). Artificial Intelligence Interventions in Mathematics Education: A Systematic Literature

- Review. Insights into Learning Disabilities, 22(1), 65-91., <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1481890.pdf>
14. Xu Z, Yang J, Zhang H and Liu T (2025) The impact of teachers' teaching strategies on students' deep learning in online learning environments: the mediating role of learning interaction. *Front. Educ.* 10:1680937. doi: 10.3389/feduc.2025.1680937, <https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/feduc.2025.1680937/full>
 15. Vandewaetere, M., & Clarebout, G. (2013). Advanced technologies for personalized learning, instruction, and performance. In *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 425-437). New York, NY: Springer New York, *Front. Artif. Intell.*, 24 October 2024, Sec. AI for Human Learning and Behavior Change, Volume 7 - 2024 <https://doi.org/10.3389/frai.2024.1471224>
 16. Stańdo, J., Fechner, Ż., Dąbrowicz-Tlałka, A., Kujawska, K., Musielak, M.M. (2025). Exploring AI Chatbots for Learning Mathematics: Students' Perspectives on Accuracy and Educational Value, *AIED 2025. Communications in Computer and Information Science*, vol 2591 . Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-99264-3_35
 17. Tan MJT, Maravilla NMAT. Shaping integrity: why generative artificial intelligence does not have to undermine education. *Front Artif Intell.* 2024 Oct 24;7:1471224. doi: 10.3389/frai.2024.1471224
 18. Ghosh, N. (2024). Artificial Intelligence and Mathematics Education : Revolutionizing Mathematics Learning. *Journal of Centre for Pedagogical Studies in Mathematics*
 19. Colonna L. Artificial Intelligence in Education (AIED): Towards More Effective Regulation. *European Journal of Risk Regulation.* Published online 2025:1-21. doi:10.1017/err.2025.10039

BEWTWEEN CODE AND TRUST: THE TRANSFORMATION OF MATHEMATICS TEACHING IN THE AGE OF AI AT TECHNICAL UNIVERSITIES

This article examines the future of mathematics didactics at technical universities amidst the AI revolution. Based on a survey of over 500 engineering students at Gdańsk University of Technology (2025/2026), the study reveals that 86.5% of students adopted AI tools before university, primarily through self-directed learning. The research highlights a significant competence gap: while only 6% of students derived AI knowledge from school teachers, 64% expect academic faculty to actively engage with and share experiences regarding these technologies. Notably, mathematics emerges as the primary subject for AI application (71%), surpassing computer science. The paper contrasts this informal adoption with China's systematic integration of AI in education. Forecasting to 2035, the authors predict a shift toward advanced Intelligent Tutoring Systems and a redefined role for teachers as designers of educational environments. The analysis warns against the objectification of educational relationships, advocating for a balance where automation handles routine tasks while teachers focus on deep, interpersonal mentoring. The study concludes that while AI allows for mass personalization, authentic human mentorship remains crucial to foster critical thinking and academic integrity in a digitized ecosystem.

Keywords: artificial intelligence, mathematics education, higher education, teacher–student relationship, personalized learning, technical universities, ChatGPT, intelligent tutoring systems.

MATEMATYKA AKADEMICKA W 2035 ROKU: WIZJE STUDENTÓW I WYZWANIA WSPÓŁCZESNEJ DYDAKTYKI

Katarzyna KUJAWSKA¹, Anna NIEWULIS²

1. Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki
tel.: 58 348 61 87 e-mail: katarzyna.kujawska@pg.edu.pl
2. Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki
tel.: 58 48 6195 e-mail: anna.niewulis@pg.edu.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono wyniki badania ankietowego przeprowadzonego wśród studentów I roku na Politechnice Gdańskiej na temat ich doświadczeń z nauką matematyki akademickiej oraz przewidywań dotyczących jej rozwoju do roku 2035. Analiza uzyskanych odpowiedzi wskazuje na jednoznaczną potrzebę zmian: odejście od tradycyjnych, wykładów i egzaminów pisemnych, dostosowania procesu kształcenia do indywidualnych potrzeb studentów, rozwój praktycznych zastosowań matematyki oraz wykorzystanie sztucznej inteligencji w procesie kształcenia. Badanie wskazuje także na zmianę roli nauczyciela, który w przyszłości ma pełnić funkcję tutora i mentora wspierającego rozwój studentów.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, wizja edukacji 2035.

1. WSTĘP

Matematyka akademicka odgrywa kluczową rolę w kształceniu inżynierów i specjalistów nauk technicznych. Jednocześnie od wielu lat obserwuje się trudności studentów w adaptacji do specyfiki nauczania na uczelni wyższej, w tym przeciążenie materiałem, brak powtórzenia podstaw czy różnice między stylem pracy w szkole średniej a na studiach [1-2]. W dobie dynamicznego rozwoju technologii cyfrowych pojawia się pytanie, jak zmieni się dydaktyka matematyki w perspektywie kolejnych kilkunastu lat i jakie oczekiwania wobec tej zmiany formułują sami studenci.

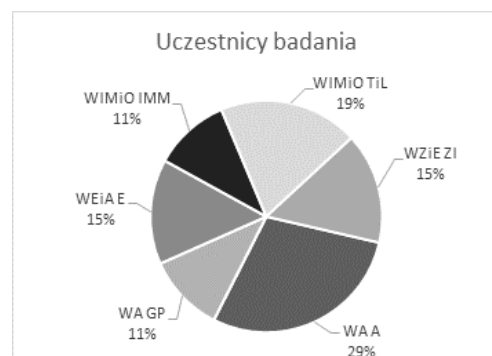
Artykuł przedstawia wyniki badania ankietowego przeprowadzonego wśród studentów I roku Politechniki Gdańskiej, dotyczącego ich doświadczeń z nauczaniem matematyki oraz wizji rozwoju dydaktyki w perspektywie roku 2035.

2. ANALIZA WYNIKÓW ANKIETY

Badanie przeprowadzono w formie ankiety online wśród studentów I roku (478 osób) z czterech wydziałów Politechniki Gdańskiej: Architektury (WA), Elektrotechniki i Automatyki (WEiA), Inżynierii Mechanicznej i Okrętownictwa (WIMiO) oraz Zarządzania i Ekonomii (WZiE) (rys. 1). Ankietę zrealizowano na przełomie maja i czerwca, czyli pod koniec dwusemestralnego cyklu zajęć z matematyki.

Kwestionariusz składał się z pytań zamkniętych jednokrotnego i wielokrotnego wyboru oraz pytań w pięciostopniowej skali Likerta. Pytania dotyczyły m.in. doświadczeń związanych z nauką matematyki na uczelni,

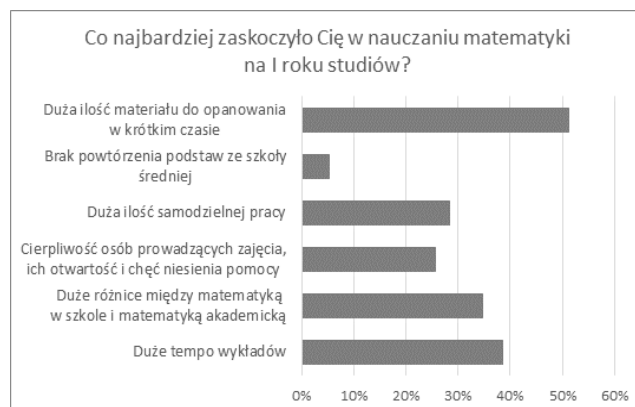
oceny tradycyjnych metod nauczania, przewidywanych zmian w nauczaniu matematyki do roku 2035 oraz roli nowoczesnych technologii, zwłaszcza sztucznej inteligencji.



Rys. 1. Uczestnicy badania

2.1. Doświadczenia studentów I roku

Najczęściej wskazywanym zaskoczeniem wśród studentów była duża ilość materiału do opanowania w krótkim czasie – połowa badanych (ok. 51%) uznała ten czynnik za największe wyzwanie. Około 40% studentów podkreślało trudności związane z dużym tempem wykładów, aż 35% zwróciło uwagę na różnice między matematyką szkolną a akademicką. Kolejnym problemem okazała się konieczność dużej samodzielności w uczeniu się (29%). Ankietowani (ok. 26%) docenili cierpliwość wykładowców oraz ich otwartą postawę i chęć niesienia pomocy (rys. 2).

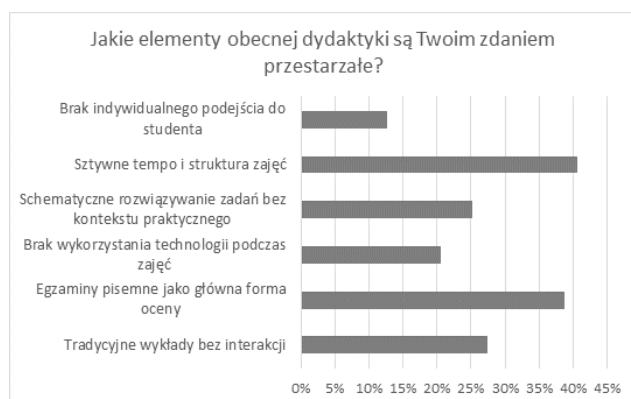


Rys. 2. Doświadczenia studentów I roku

Otrzymane wyniki sugerują, że największym problemem, z jakim mierzą się studenci pierwszego roku, jest przeciążenie nadmiarem materiału do opanowania w bardzo krótkim czasie oraz brak płynnego przejścia między poziomem szkolnym a akademickim. W praktyce oznacza to, że pierwsze miesiące studiów wymagają od studentów szybkiego uzupełnienia luk edukacyjnych z niższych poziomów nauczania i równoczesnego przyswajania nowych, bardziej abstrakcyjnych treści, co dla wielu z nich okazuje się szczególnie trudne.

2.2. Ocena obecnych form dydaktyki

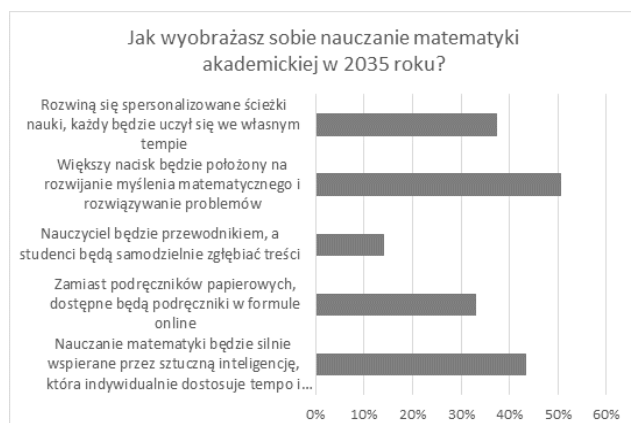
Studenci krytycznie odnieśli się do niektórych elementów obecnego modelu nauczania matematyki akademickiej, wskazując na jego nadmierną teoretyczność i niewystarczające powiązanie z praktyką. Za najbardziej przestarzałe uznano sztywne tempo i strukturę zajęć (40%), egzaminy pisemne jako główną formę oceny (39%) oraz tradycyjne wykłady pozbawione interakcji (27%) (rys. 3). Niewielki odsetek ankietowanych wskazywał na schematyczne rozwiązywanie zadań czy brak wykorzystania technologii. Wyniki sugerują potrzebę odejścia od frontalnych, jednolitych metod na rzecz bardziej elastycznych i interaktywnych rozwiązań.



Rys. 3. Ocena obecnych form dydaktyki

2.3. Przyszłość matematyki w roku 2035

W perspektywie roku 2035 studenci przewidują istotne zmiany w sposobie nauczania matematyki akademickiej. W odpowiedziach studentów dominuje podkreślenie znaczenia rozwijania umiejętności myślenia matematycznego i rozwiązywania problemów (50%), a także potrzeba wykorzystania sztucznej inteligencji (43%) oraz spersonalizowanych ścieżek uczenia się (38%) (rys. 4).



Rys. 4. Przyszłość matematyki w roku 2035

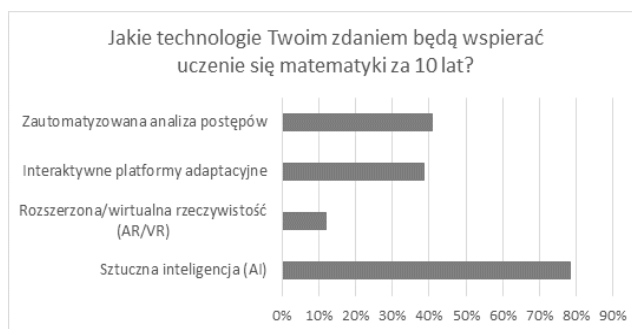
Ważnym oczekiwaniem jest również zwiększenie roli tutoringu akademickiego, który umożliwi bardziej elastyczne dostosowanie tempa i poziomu trudności omawianych zagadnień do indywidualnych potrzeb odbiorców. Tradycyjne formy nauczania – m.in. podręczniki drukowane czy rola nauczyciela jako jedynego źródła wiedzy – mają zdecydowanie mniejsze znaczenie dla badanych.

Wyniki badań przedstawione na rys. 5 wskazują, że większość studentów pozytywnie ocenia wpływ nowoczesnych technologii na skuteczność nauczania matematyki. 31% respondentów „zdecydowanie zgadza się”, a około połowa „raczej zgadza się” ze stwierdzeniem, że technologie cyfrowe mogą poprawić efektywność kształcenia. Jedynie niewielki odsetek osób wyraził brak zdania lub sceptycyzm wobec tej tezy. Oznacza to, że studenci dostrzegają potencjał technologii w usprawnianiu procesu dydaktycznego – zarówno poprzez zwiększenie interaktywności zajęć, jak i możliwość bieżącej analizy postępów w nauce.



Rys. 5. Nowoczesne technologie a skuteczność nauczania matematyki

Na rys. 6 przedstawiono konkretne technologie, które – zdaniem studentów – będą w największym stopniu wspierały uczenie się matematyki w perspektywie najbliższej dekady. Na pierwszym miejscu znalazła się sztuczna inteligencja (AI), którą wskazało około 79% badanych. Wysoko oceniono również znaczenie zautomatyzowanej analizy postępów oraz interaktywnych platform adaptacyjnych, umożliwiających dostosowanie poziomu trudności zadań do indywidualnych potrzeb użytkownika. Te ostatnie umożliwiają nie tylko rozwiązywanie problemów, ale również symulację wyników oraz dają natychmiastową informację zwrotną. Nieco mniejsze, lecz wciąż istotne znaczenie przypisano technologiom rozszerzonej i wirtualnej rzeczywistości (AR/VR), które mogą wspierać wizualizację złożonych pojęć matematycznych.



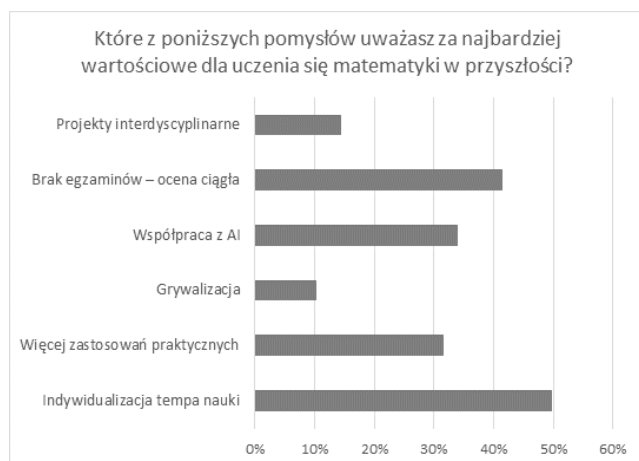
Rys. 6. Technologie wspierające uczenie się matematyki

Uzyskane wyniki wskazują, że studenci zdecydowanie większą wagę przywiązują do nowoczesnych elementów dydaktyki. Tradycyjne rozwiązania odgrywają w ich wizji przyszłości marginalną rolę. Oczekiwania studentów koncentrują się na bardziej elastycznym i zindywidualizowanym podejściu do nauczania, wspieranym przez technologie sztucznej inteligencji oraz narzędzia cyfrowe umożliwiające bieżące monitorowanie postępów i personalizację procesu uczenia się.

2.4. Pomysły na przyszłość

Studenci cenią przede wszystkim indywidualizację tempa nauki (50%), więcej zastosowań praktycznych (32%) i współpracę z AI (34%) (rys. 7). Wskazuje to na silne oczekiwanie wobec odejścia od jednolitego modelu kształcenia na rzecz elastycznego podejścia, które pozwala każdemu studentowi uczyć się zgodnie z własnym rytmem i stylem poznawczym. Indywidualizacja nauki jest postrzegana jako kluczowy czynnik zwiększający skuteczność procesu dydaktycznego oraz motywację do samodzielnego zdobywania wiedzy. Duże znaczenie ma również praktyczny wymiar matematyki, czyli większe powiązanie treści akademickich z rzeczywistymi problemami technicznymi, naukowymi i społecznymi. Studenci oczekują, że w przyszłości nauka matematyki będzie bardziej zorientowana na zastosowania, a nie wyłącznie na teorię. Wysoko oceniona współpraca z systemami sztucznej inteligencji, wskazuje na rosnącą świadomość potencjału narzędzi cyfrowych w procesie uczenia się. AI może wspierać studentów w rozwiązywaniu problemów, dostarczać spersonalizowane podpowiedzi oraz analizować postępy w nauce w czasie rzeczywistym.

Wśród wskazanych przez studentów rozwiązań dużą popularnością cieszy się również ciągła ocena postępów zamiast tradycyjnych egzaminów (ok. 41%). Tego rodzaju podejście odzwierciedla zmianę w sposobie postrzegania procesu uczenia się – z jednorazowej weryfikacji wiedzy na rzecz systematycznego monitorowania rozwoju kompetencji. Studenci dostrzegają w tym modelu większą sprawiedliwość i motywujący charakter, ponieważ ocena staje się efektem całego procesu dydaktycznego, a nie tylko wynikiem jednego testu czy egzaminu końcowego. Ciągła ocena postępów umożliwia również nauczycielom lepsze rozpoznanie indywidualnych potrzeb studentów oraz szybsze reagowanie na pojawiające się trudności. Dzięki temu proces nauczania może być bardziej elastyczny, a feedback – bieżący i konstruktywny.

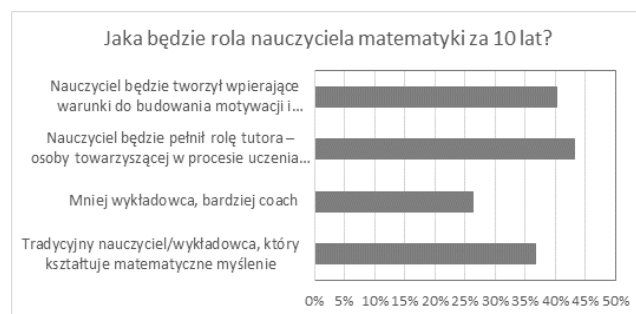


Rys. 7. Pomysły na przyszłość

Nieco mniejszym, choć wciąż zauważalnym zainteresowaniem, cieszą się takie pomysły jak projekty interdyscyplinarne (ok. 14%) czy grywalizacja (ok. 10%). Wyniki te sugerują, że choć studenci doceniają nowoczesne formy nauczania, największą wartość przypisują takim rozwiązaniom, które łączą elastyczność, praktyczność i wsparcie technologiczne.

2.5. Rola nauczyciela

W przyszłości nauczyciel ma być przede wszystkim tutorem (45%) oraz osobą tworzącą wspierające warunki do budowania motywacji i ciekawości (40%) (rys. 8).



Rys. 8. Rola nauczyciela

Wyniki te jednoznacznie wskazują na zmianę oczekiwań wobec roli dydaktyka akademickiego – z tradycyjnego wykładowcy pełniącego funkcję informacyjną na mentora, przewodnika i partnera w procesie uczenia się. Taka rola wymaga od nauczyciela nie tylko głębokiej znajomości treści merytorycznych, lecz także rozwiniętych kompetencji interpersonalnych, empatii i umiejętności wspierania samodzielnego myślenia studentów.

W nowoczesnym modelu edukacji nauczyciel staje się przewodnikiem w procesie uczenia się, który pomaga studentom odkrywać zależności, formułować problemy i poszukiwać rozwiązania. Zamiast kontrolować przebieg nauki, inspirować do jej pogłębiania, wspiera rozwój indywidualnych ścieżek edukacyjnych oraz promuje postawę samodzielności i odpowiedzialności za własny rozwój.

Tradycyjny model wykładowcy – skoncentrowany na jednostronnym przekazie treści w formie wykładów – uzyskał mniejsze poparcie wśród badanych (36%). Oznacza to, że studenci oczekują bardziej partnerskiej relacji z nauczycielem, w której wiedza jest współtworzona poprzez dialog, dyskusję i praktyczne zastosowanie matematyki. W takiej wizji edukacji rośnie znaczenie kompetencji miękkich oraz umiejętności pracy z grupą, a sam nauczyciel pełni funkcję moderatora procesu dydaktycznego, nie zaś głównego źródła.

2.6. Nauczanie matematyki w opinii studentów

Dopełnieniem ankiety było pytanie otwarte, w którym poproszono o odpowiedź na pytanie „Co Twoim zdaniem powinno się zmienić w nauczaniu matematyki na uczelni w najbliższych latach?”

W ramach tego pytania studenci mieli możliwość swobodnego wyrażenia swoich opinii, jak – ich zdaniem – powinny wyglądać w przyszłości zajęcia z matematyki. Dla zachowania autentyczności, wypowiedzi respondentów zostały przytoczone w oryginalnej pisowni:

- „głównym aspektem do zmiany w najbliższych latach jest rozwiniecie systemu bardziej indywidualnej formy nauki

(mniejsze grupy, więcej opieki nad uczniem). Zmniejszy to liczbę godzin nauki w domu oraz doda odwagi czy pewnego rodzaju otuchy podczas lekcji tym nieśmiałym aby mogli się odezwać, zapytać, przemyśleć, policzyć”,

- „nauczyciel akademicki pełni niezwykle ważną rolę, budując na zajęciach praktycznych (ćwiczeniach) przyjazną atmosferę zachęcającą do nauki matematyki np, dopuszczając popełnienie pomyłki”,

- „zajęcia z matematyki powinny być podzielone na grupy ze względu na poziom zaawansowania studenta (np. poziom podstawowy - dla osób, które mają problemy z matematyką - i rozszerzony - dla których nauka matematyki nie sprawia większych problemów”,

- „powinna wejść w życie współpraca z AI (które analizowałoby potencjał i wiedzę studenta) i dostosowywałaby dzięki temu tempo nauki do każdego przypadku z osobna”,

- „każdy student powinien mieć możliwość przyswajania materiału w swoim tempie. Ocena końcowa powinna być ciągła a nie wyznaczana tylko egzaminem”,

- „ocenianie postępów oraz wiedzy studenta nie powinno oceniać się punktami i cyferkami. Lepszym rozwiązaniem byłyby oceny opisowe, które dokładnie wskazują nad czym student musi jeszcze pracować oraz zmusza prowadzącego do indywidualnego podejścia, które zwiększą wydajność nauczania”.

3. DYSKUSJA WYNIKÓW

Otrzymane wyniki wskazują na potrzebę gruntownej zmiany dydaktyki matematyki na uczelniach technicznych.

- **Deficyty na I roku studiów** - brak powtórzenia podstaw i uzupełnienia braków wiedzy matematycznej oraz przeciążenie materiałem prowadzą do narastania trudności i obniżenia efektywności nauki. Taka sytuacja wskazuje na konieczność wprowadzenia kursów wyrównawczych i testów diagnostycznych pozwalających wczesne wykrycie problemów. Potrzebne jest elastyczne wsparcie dydaktyczne dostosowane do poziomu studentów.
- **Krytyka tradycyjnych metod** - klasyczne wykłady i egzaminy pisemne nie odpowiadają potrzebom współczesnych studentów. Literatura rekomenduje większą interaktywność [3], ocenianie formatywne [4] oraz indywidualizację nauczania [5]. Należy zastanowić się nad zmniejszeniem roli jednostronnego modelu nauczania na rzecz pracy w małych grupach i tym samym zwiększenia interaktywności.
- **Technologie i AI** – studenci oczekują personalizacji wspieranej przez sztuczną inteligencję. Wynik ten współbrzmi z trendami globalnymi dotyczącymi adaptacyjnych systemów edukacyjnych.

- **Nowa rola nauczyciela** – wyniki potwierdzają, że wykładowca w coraz większym stopniu powinien pełnić rolę tutora, mentora i być przewodnikiem w procesie uczenia się. Ma również wspierać studentów w samodzielnym zgłębianiu wiedzy. Taka rola nauczyciela wzmocni autonomię studentów.
- **Praktyczność matematyki** – umiarkowany konsensus w tym obszarze wskazuje na konieczność stopniowego wprowadzania kontekstów aplikacyjnych, np. poprzez projekty interdyscyplinarne.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Współczesny model nauczania matematyki wymaga modernizacji: większej personalizacji, interaktywności i odejścia od sztywnych form oceniania.

Rola nauczyciela powinna ewoluować w stronę tutora i mentora, wspierającego motywację i ciekawość poznawczą studentów.

Sztuczna inteligencja postrzegana jest jako kluczowe narzędzie wspierające dydaktykę matematyki do 2035 roku. Należy rozważyć pilotaże dydaktyczne z wykorzystaniem AI oraz oceniania formatywnego, przy jednoczesnym monitorowaniu efektów kształcenia.

Zaprezentowany artykuł nie obejmuje problematyki zagrożeń związanych z dynamicznym rozwojem nowoczesnych technologii, pozostawiając to zagadnienie jako obszar do dalszych rozważań.

5. BIBLIOGRAFIA

1. Tall D. O.: *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, 3–21, 1991.
2. Pardała A.: Współczesne problemy i praktyka kształcenia matematycznego studentów. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis, Studia Ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 4, 113–138, 2017.
3. Dąbrowicz-Tlałka, A.: Edukacja matematyczna na poziomie akademickim na kierunkach ścisłych i technicznych w dobie technologii mobilnych i sztucznej inteligencji. *e-mentor*, 5(102), 57–64, 2023.
4. Bojanowicz J.: Ocenianie kształtujące w kształceniu akademickim, *Journal of Education, Technology and Computer Science*, 4(30) 122–127, 2019.
5. Peć B. A.: Indywidualizacja nauczania i uczenia się – otwarte formy pracy w gimnazjum oraz w kształceniu akademickim (action research), *Neofilolog*, 49(1) 95–114, 2017.

ACADEMIC MATHEMATICS IN 2035: STUDENTS' VISIONS AND THE CHALLENGES OF CONTEMPORARY DIDACTICS

The article presents the results of a survey conducted among first-year students at Gdańsk University of Technology regarding their experiences with learning academic mathematics and their predictions about its development by the year 2035. The analysis of the responses clearly indicates a need for change: moving away from traditional lectures and written exams, adapting the learning process to individual student needs, developing practical applications of mathematics, and incorporating artificial intelligence into the educational process. The study also points to a transformation in the teacher's role — in the future, the instructor is expected to act as a tutor and mentor supporting students' development.

Keywords: mathematics education, vision of education 2035.