Creating and solving lists of exercises with Mathematica
Local extrema of functions in one variable

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

School of Mathematics, West Pomeranian University of Technology in Szczecin, Al. Piastów 17, 70-310 Szczecin, Poland

e - mail: ewert@zut.edu.pl

1 Introduction

We present programs in Mathematica that allow to create a long lists of different exercises of similar types for students and the second ones of answers.

Three programs are presented that can be applied to the following problems:

1. For what values of a parameter the function f has an extremum at the indicated point x_0? What type it is?
2. For what values of two parameters the function f has an extremum at the indicated point x_p and takes the given values y_p? Test the type.
3. For what values of two parameters the function f has the extrema at two indicated points x_1, x_2? Test the types.

We want to make all numerical computations as easy as possible.

To solve the problems we begin with a function that depends on some number of parameters, choose integers x_0, x_p and y_p or x_1 and x_2, respectively, and solve some equations with respect to parameters in integers with some exceptions in the case 3.

In these settings, for a given function f, the user has to choose only x_0, x_p and y_p or x_1 and x_2, respectively. The ranges of parameters are given, however they can be also changed by the user.

In section 5 we present another approach to the problem described in the point 3. We choose the number s of stationary points and maximal admissible number m of solutions to each such pairs. The program chooses randomly coordinates of stationary points and no more then m solutions corresponding to each pair. Then prints the list of exercises and the list of answers.

For each example we create the set of exercises. Their number can varies related to needs and depends on function, starting point, ranges of parameters etc.

For better understanding, in sections 2 and 3 we explain, step by step, the result of each code we have created. In sections 4 and 5 we present a necessary codes in a compact form. We do not explain how Mathematica works! For that we refer to help menu in Mathematica.

Codes in each part run independently from other ones.

For those not familiar with Mathematica the .pdf and .tex files are attached.

2 Problem 1

Preliminaries

For what value of a given parameter the function f has a local extremum at an indicated point? Test the type of the extrema.

Define the function f.

In[∘]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := (x^3 + a x^2 + b) Exp[c x]
```

Its derivative is

In[∘]:=
```
firstderivativeoff = D[f[a, b, c][x], x] // Factor
```

Out[∘]= $e^{c x} (b c + 2 a x + 3 x^2 + a c x^2 + c x^3)$

Its derivative after being simplified

In[∘]:=
```
MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, firstderivativeoff, 2]
```

Out[∘]= $e^{c x} (b c + 2 a x + (3 + a c) x^2 + c x^3)$

We look for integers a, b, c, |a| < 5, |b| < 5, c arbitrary, so that x_0 is a stationary point of f. The range of the parameters can be chosen arbitrary. The change of the range must be done in the line listofparameters.

Let x_0 == xxxx. Put for example

In[∘]:=
```
xxxx = -1
```

Out[∘]= -1

At each place the symbol xxxx appears it will be replaced by the number on the right hand side. In our example by -1.
Now it is the time to change the ranges of parameters if necessary. In our setting listofparameters returns integer values of a, b, c, where |a| < 5, |b| < 5, that are solutions to $f'[a, b, c][x_p] == 0$.

In[∘]:=
```
listofparameters = Reduce[
  (D[f[a, b, c][x], x] == 0 /. x → xxxx) && -5 < a < 5 && -5 < b < 5, {a, b, c}, Integers]
```

Out[∘]=
```
(a == -4 && b == 4 && c == 11) || (a == -3 && b == 1 && c == 3) ||
 (a == -3 && b == 3 && c == 9) || (a == -2 && b == -4 && c == 1) || (a == -2 && b == 2 && c == 7) ||
 (a == -2 && b == 4 && c == -7) || (a == -1 && b == -3 && c == 1) || (a == -1 && b == 1 && c == 5) ||
 (a == -1 && b == 3 && c == -5) || (a == 0 && b == -2 && c == 1) || (a == 0 && b == 0 && c == 3) ||
 (a == 0 && b == 2 && c == -3) || (a == 0 && b == 4 && c == -1) || (a == 1 && b == -1 && c == 1) ||
 (a == 1 && b == 1 && c == -1) || (a == 2 && b == -2 && c == -1) || (a == 2 && b == 0 && c == 1) ||
 (a == 3 && b == -3 && c == -3) || (a == 3 && b == -1 && c == 3) || (a == 3 && b == 1 && c == 1) ||
 (a == 4 && b == -4 && c == -5) || (a == 4 && b == -2 && c == 5) || (a == 4 && b == 2 && c == 1)
```

How many exercises we get?

In[∘]:=
```
Length[listofparameters]
```

Out[∘]=
```
23
```

Simplified list of values of parameters {a, b, c}:

In[∘]:=
```
list = Map[{#[[1, 2]], #[[2, 2]], #[[3, 2]]} &, listofparameters]
```

Out[∘]=
```
{-4, 4, 11} || {-3, 1, 3} || {-3, 3, 9} || {-2, -4, 1} || {-2, 2, 7} || {-2, 4, -7} ||
 {-1, -3, 1} || {-1, 1, 5} || {-1, 3, -5} || {0, -2, 1} || {0, 0, 3} ||
 {0, 2, -3} || {0, 4, -1} || {1, -1, 1} || {1, 1, -1} || {2, -2, -1} || {2, 0, 1} ||
 {3, -3, -3} || {3, -1, 3} || {3, 1, 1} || {4, -4, -5} || {4, -2, 5} || {4, 2, 1}
```

For students

For what values of the parameter a the function f has a local extrema at a point x_0 == xxxx? What type it is?

We create a list of function to be presented to students. We write f[x] instead of f[a,b,c][x].
Firstly, replace values of a parameter a by a symbol:

In[∘]:=
```
alist = Apply[Replace[{#1, #2, #3}, {#1, #2, #3} → {a, #2, #3}] &,  list, {1}]
```

Out[∘]=
```
{a, 4, 11} || {a, 1, 3} || {a, 3, 9} || {a, -4, 1} || {a, 2, 7} || {a, 4, -7} ||
 {a, -3, 1} || {a, 1, 5} || {a, 3, -5} || {a, -2, 1} || {a, 0, 3} || {a, 2, -3} ||
 {a, 4, -1} || {a, -1, 1} || {a, 1, -1} || {a, -2, -1} || {a, 0, 1} ||
 {a, -3, -3} || {a, -1, 3} || {a, 1, 1} || {a, -4, -5} || {a, -2, 5} || {a, 2, 1}
```

We create the list of right hand sides of the definitions of functions that depend on parameter a.

In[∘]:=
```
alistofrighthandsides = Apply[f[#1, #2, #3][x] &, alist, {1}]
```

Out[∘]=

$$e^{11x}\left(4+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{3x}\left(1+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{9x}\left(3+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(-4+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{7x}\left(2+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-7x}\left(4+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(-3+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{5x}\left(1+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-5x}\left(3+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(-2+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{3x}\left(a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-3x}\left(2+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(4+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(-1+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(1+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(-2+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-3x}\left(-3+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{3x}\left(-1+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(1+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-5x}\left(-4+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{5x}\left(-2+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(2+a x^2+x^3\right)$$

The list of exercises for students with instruction (here in Polish):

In[∘]:=
```
Do[ {Print[Style[r, Bold]],
    Print[" Dla jakiej wartości parametru a funkcja f ma ekstremum
       lokalne w punkcie x0 ? Jakiego rodzaju?"],
    Print[x0 == xxxx],
    Print[ f[x] == alistofrighthandsides[[r]] ] },
   {r, 1, Length[alistofrighthandsides]}];
```

1

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{11x}\left(4+a x^2+x^3\right)$

2

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{3x}\left(1+a x^2+x^3\right)$

3

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{9x}\left(3+a x^2+x^3\right)$

4

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{x}\left(-4+a x^2+x^3\right)$

5

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{7x}\left(2+a x^2+x^3\right)$

6

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-7x}\left(4 + a x^2 + x^3\right)$

7

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{x}\left(-3 + a x^2 + x^3\right)$

8

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{5x}\left(1 + a x^2 + x^3\right)$

9

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-5x}\left(3 + a x^2 + x^3\right)$

10

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{x}\left(-2 + a x^2 + x^3\right)$

11

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{3x}\left(a x^2 + x^3\right)$

12

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-3x}\left(2 + a x^2 + x^3\right)$

13

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-x}\left(4 + a x^2 + x^3\right)$

14

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^x \left(-1 + a x^2 + x^3\right)$

15

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-x} \left(1 + a x^2 + x^3\right)$

16

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-x} \left(-2 + a x^2 + x^3\right)$

17

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^x \left(a x^2 + x^3\right)$

18

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-3x} \left(-3 + a x^2 + x^3\right)$

19

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{3x} \left(-1 + a x^2 + x^3\right)$

20

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^x \left(1 + a x^2 + x^3\right)$

21

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{-5x} \left(-4 + a x^2 + x^3\right)$

22

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{5x}\left(-2 + a x^2 + x^3\right)$

23

Dla jakiej wartości parametru a funkcja
f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 ? Jakiego rodzaju?

$x_0 == -1$

$f[x] == e^{x}\left(2 + a x^2 + x^3\right)$

Answers

We prepare a list of answers. afprim is a factorized list of derivatives f'[x] that depends on a parameter a.

In[∘]:=
```
afprim = Module[ {aa, bb, cc}, aa = Map[ D[#, x] &, alistofrighthandsides];
  bb = Map[Collect[#, E^aa_] &, Expand[aa]];
   Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bb[[r]], 2], {r, 1, Length[bb]}]]
```

Out[∘]=

$$\{e^{11x}\left(44 + 2ax + (3 + 11a)x^2 + 11x^3\right), e^{3x}\left(3 + 2ax + (3 + 3a)x^2 + 3x^3\right),$$
$$e^{9x}\left(27 + 2ax + (3 + 9a)x^2 + 9x^3\right), e^{x}\left(-4 + 2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right),$$
$$e^{7x}\left(14 + 2ax + (3 + 7a)x^2 + 7x^3\right), e^{-7x}\left(-28 + 2ax + (3 - 7a)x^2 - 7x^3\right),$$
$$e^{x}\left(-3 + 2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right), e^{5x}\left(5 + 2ax + (3 + 5a)x^2 + 5x^3\right),$$
$$e^{-5x}\left(-15 + 2ax + (3 - 5a)x^2 - 5x^3\right), e^{x}\left(-2 + 2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right),$$
$$e^{3x}\left(2ax + (3 + 3a)x^2 + 3x^3\right), e^{-3x}\left(-6 + 2ax + (3 - 3a)x^2 - 3x^3\right),$$
$$e^{-x}\left(-4 + 2ax + (3 - a)x^2 - x^3\right), e^{x}\left(-1 + 2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right),$$
$$e^{-x}\left(-1 + 2ax + (3 - a)x^2 - x^3\right), e^{-x}\left(2 + 2ax + (3 - a)x^2 - x^3\right), e^{x}\left(2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right),$$
$$e^{-3x}\left(9 + 2ax + (3 - 3a)x^2 - 3x^3\right), e^{3x}\left(-3 + 2ax + (3 + 3a)x^2 + 3x^3\right),$$
$$e^{x}\left(1 + 2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right), e^{-5x}\left(20 + 2ax + (3 - 5a)x^2 - 5x^3\right),$$
$$e^{5x}\left(-10 + 2ax + (3 + 5a)x^2 + 5x^3\right), e^{x}\left(2 + 2ax + (3 + a)x^2 + x^3\right)\}$$

We compute values of parameter a that satisfy the assumptions previously mentioned.

In[∘]:=
```
valuesofa = Module[ {aaa, bbb, ccc}, aaa = afprim /. x → xxxx;
Table[ Reduce[aaa[[r]] == 0, a], {r, 1, Length[afprim]}]]
```

Out[∘]=

$\{a == -4, a == -3, a == -3, a == -2, a == -2, a == -2, a == -1, a == -1, a == -1, a == 0, a == 0,$
$a == 0, a == 0, a == 1, a == 1, a == 2, a == 2, a == 3, a == 3, a == 3, a == 4, a == 4, a == 4\}$

afbis is a factorized list of the derivatives of the second order for computed values of a:

In[∘]:=
```
afbis = Module[ {aa, bb, cc},
  cc = Table[afprim[[r]] /. a → valuesofa[[r, 2]], {r, 1, Length[afprim]}];
   aa = Map[ D[#, x] &, cc]; bb = Map[Collect[#, E^aa_] &, Expand[aa]];
   Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bb[[r]], 2], {r, 1, Length[bb]}]]
```

Out[∘]=

$$\{e^{11x}(476-170x-418x^2+121x^3),\ e^{3x}(3-30x-9x^2+9x^3),\ e^{9x}(237-102x-189x^2+81x^3),\ e^{x}(-8-2x+4x^2+x^3),\ e^{7x}(94-50x-56x^2+49x^3),\ e^{-7x}(192+62x-140x^2+49x^3),\ e^{x}(-5+2x+5x^2+x^3),\ e^{5x}(23-14x+5x^2+25x^3),\ e^{-5x}(73+26x-55x^2+25x^3),\ e^{x}(-2+6x+6x^2+x^3),\ e^{3x}(6x+18x^2+9x^3),\ e^{-3x}(18+6x-18x^2+9x^3),\ e^{-x}(4+6x-6x^2+x^3),\ e^{x}(1+10x+7x^2+x^3),\ e^{-x}(3+2x-5x^2+x^3),\ e^{-x}(2-2x-4x^2+x^3),\ e^{x}(4+14x+8x^2+x^3),\ e^{-3x}(-21-30x+9x^2+9x^3),\ e^{3x}(-3+42x+45x^2+9x^3),\ e^{x}(7+18x+9x^2+x^3),\ e^{-5x}(-92-74x+70x^2+25x^3),\ e^{5x}(-42+86x+130x^2+25x^3),\ e^{x}(10+22x+10x^2+x^3)\}$$

We compute $f''[x_0]$:

In[∘]:=
```
valuesofafbis = afbis /. x → xxxx
```

Out[∘]=

$$\left\{\frac{107}{e^{11}},\ \frac{15}{e^{3}},\ \frac{69}{e^{9}},\ -\frac{3}{e},\ \frac{39}{e^{7}},\ -59\,e^{7},\ -\frac{3}{e},\ \frac{17}{e^{5}},\ -33\,e^{5},\ -\frac{3}{e},\ \frac{3}{e^{3}},\ -15\,e^{3},\ -9\,e,\ -\frac{3}{e},\ -5\,e,\ -e,\ -\frac{3}{e},\ 9\,e^{3},\ -\frac{9}{e^{3}},\ -\frac{3}{e},\ 27\,e^{5},\ -\frac{23}{e^{5}},\ -\frac{3}{e}\right\}$$

minmaks determines the type of extrema:

In[∘]:=
```
minmaks =
 Table[ {valuesofafbis[[r]], Which[valuesofafbis[[r]] < 0, "Maksimum lokalne",
    valuesofafbis[[r]] > 0, "Minimum lokalne", valuesofafbis[[r]] == 0,
    "nie rozstrzyga"] }, {r, 1, Length[valuesofafbis]}]
```

Out[∘]=

$$\left\{\left\{\frac{107}{e^{11}},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{\frac{15}{e^{3}},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{\frac{69}{e^{9}},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{\frac{39}{e^{7}},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{-59\,e^{7},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{\frac{17}{e^{5}},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{-33\,e^{5},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{\frac{3}{e^{3}},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{-15\,e^{3},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \{-9\,e,\ \text{Maksimum lokalne}\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \{-5\,e,\ \text{Maksimum lokalne}\},\ \{-e,\ \text{Maksimum lokalne}\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{9\,e^{3},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{9}{e^{3}},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{27\,e^{5},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{23}{e^{5}},\ \text{Maksimum lokalne}\right\},\ \left\{-\frac{3}{e},\ \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$$

Finally we get a numbered list of answers (in Polish):

In[ ]:=
```
Do[ {Print[Style[r, Bold]], Print["Funkcja i jej pochodna:"],
   Print[ f[x] == alistofrighthandsides[[r]] ] ,
   Print[f'[x] == afprim[[r]] ],
   Print[x0 == xxxx],
   Print["Wartość parametru dla której f'[x0] == 0:"], Print[valuesofa[[r]] ],
   Print["Pochodna rzędu drugiego:"],
    Print[ f''[x] == afbis[[r]]],
   Print["Rodzaj ekstremum:"], Print[f''[x0] == minmaks[[r]] ]},
  {r, 1, Length[minmaks]}]
```

1

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{11x}\left(4 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{11x}\left(44 + 2 a x + (3 + 11 a) x^2 + 11 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -4$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{11x}\left(476 - 170 x - 418 x^2 + 121 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{\frac{107}{e^{11}}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

2

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{3x}\left(1 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{3x}\left(3 + 2 a x + (3 + 3 a) x^2 + 3 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -3$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{3x}\left(3 - 30 x - 9 x^2 + 9 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{\frac{15}{e^{3}}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

3

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{9x}\left(3 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{9x}\left(27 + 2 a x + (3 + 9 a) x^2 + 9 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -3$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{9x}\left(237 - 102x - 189x^2 + 81x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{\frac{69}{e^9}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

4

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(-4 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{x}\left(-4 + 2 a x + (3 + a) x^2 + x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-8 - 2x + 4x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

5

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{7x}\left(2 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{7x}\left(14 + 2 a x + (3 + 7 a) x^2 + 7x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{7x}\left(94 - 50x - 56x^2 + 49x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{\frac{39}{e^7}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

6

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-7x}\left(4 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{-7x}\left(-28 + 2 a x + (3 - 7 a) x^2 - 7x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-7x}\left(192 + 62x - 140x^2 + 49x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \{-59\, e^7, \text{Maksimum lokalne}\}$

7

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x\,(-3 + a\,x^2 + x^3)$

$f'[x] == e^x\,(-3 + 2\,a\,x + (3 + a)\,x^2 + x^3)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x\,(-5 + 2\,x + 5\,x^2 + x^3)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

8

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{5\,x}\,(1 + a\,x^2 + x^3)$

$f'[x] == e^{5\,x}\,(5 + 2\,a\,x + (3 + 5\,a)\,x^2 + 5\,x^3)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{5\,x}\,(23 - 14\,x + 5\,x^2 + 25\,x^3)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{\frac{17}{e^5}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

9

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-5\,x}\,(3 + a\,x^2 + x^3)$

$f'[x] == e^{-5\,x}\,(-15 + 2\,a\,x + (3 - 5\,a)\,x^2 - 5\,x^3)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == -1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-5\,x}\,(73 + 26\,x - 55\,x^2 + 25\,x^3)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \{-33\, e^5, \text{Maksimum lokalne}\}$

10

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x\,(-2 + a\,x^2 + x^3)$

$f'[x] == e^{x}\left(-2+2\,a\,x+(3+a)\,x^{2}+x^{3}\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

$a == 0$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-2+6\,x+6\,x^{2}+x^{3}\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

11

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{3\,x}\left(a\,x^{2}+x^{3}\right)$

$f'[x] == e^{3\,x}\left(2\,a\,x+(3+3\,a)\,x^{2}+3\,x^{3}\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

$a == 0$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{3\,x}\left(6\,x+18\,x^{2}+9\,x^{3}\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{\frac{3}{e^{3}}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

12

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-3\,x}\left(2+a\,x^{2}+x^{3}\right)$

$f'[x] == e^{-3\,x}\left(-6+2\,a\,x+(3-3\,a)\,x^{2}-3\,x^{3}\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

$a == 0$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-3\,x}\left(18+6\,x-18\,x^{2}+9\,x^{3}\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-15\,e^{3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

13

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(4+a\,x^{2}+x^{3}\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(-4+2\,a\,x+(3-a)\,x^{2}-x^{3}\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

$a == 0$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(4 + 6x - 6x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \{-9e, \text{Maksimum lokalne}\}$

14

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(-1 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{x}\left(-1 + 2 a x + (3 + a) x^2 + x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == 1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(1 + 10 x + 7 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

15

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(1 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(-1 + 2 a x + (3 - a) x^2 - x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == 1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(3 + 2 x - 5 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \{-5e, \text{Maksimum lokalne}\}$

16

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(-2 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(2 + 2 a x + (3 - a) x^2 - x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == 2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(2 - 2 x - 4 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \{-e, \text{Maksimum lokalne}\}$

17

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{x} \left(a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{x} \left(2 a x + (3 + a) x^2 + x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == 2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x} \left(4 + 14 x + 8 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

18

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-3 x} \left(-3 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{-3 x} \left(9 + 2 a x + (3 - 3 a) x^2 - 3 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == 3$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-3 x} \left(-21 - 30 x + 9 x^2 + 9 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{9 e^3, \text{Minimum lokalne}\right\}$

19

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{3 x} \left(-1 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{3 x} \left(-3 + 2 a x + (3 + 3 a) x^2 + 3 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której $f'[x_0] == 0$:

$a == 3$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{3 x} \left(-3 + 42 x + 45 x^2 + 9 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{9}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

20

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{x} \left(1 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{x} \left(1 + 2 a x + (3 + a) x^2 + x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

a == 3

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(7 + 18 x + 9 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

21

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-5x} \left(-4 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{-5x} \left(20 + 2 a x + (3 - 5 a) x^2 - 5 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

a == 4

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-5x} \left(-92 - 74 x + 70 x^2 + 25 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{27 e^5, \text{Minimum lokalne}\right\}$

22

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{5x} \left(-2 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^{5x} \left(-10 + 2 a x + (3 + 5 a) x^2 + 5 x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

a == 4

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{5x} \left(-42 + 86 x + 130 x^2 + 25 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{23}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

23

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x \left(2 + a x^2 + x^3\right)$

$f'[x] == e^x \left(2 + 2 a x + (3 + a) x^2 + x^3\right)$

$x_0 == -1$

Wartość parametru dla której f'[x_0] == 0:

a == 4

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(10 + 22 x + 10 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[x_0] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

Clear all definitions.

In[∘]:=
```
Clear[f, firstderivativeoff, xxxx, listofparameters, list, alist,
 alistofrighthandsides, afprim, valuesofa, afbis, valuesofafbis, minmaks]
```

Tips for users

The following quantities can be changed by the user:
1) the stationary point x_0;
2) the ranges of parameters a and b; these can be done inside the code listofparameters;
3) the functions f.

3 Problem 2

For what values of parameters a, b the function f has at a point x_p the local extrema and $f[x_p]$ is given? Test the types of extrema.

Preliminaries

Define the function f in one real variable x that depends on three real parameters a, b, c.

In[∘]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := (x^3 + a x^2 + b) Exp[c x]
```

We look for four integers a, b, c, d that satisfy the conditions: $f'[a, b, c][x_p]$ == 0 and $f[a, b, c][x_p]$ == dExp$[c\, x_p]$. We suppose |a| < 6, |b| < 6, however these can be chosen arbitrarily (see ablistofparameters below).

Put x_p == xxxx and chose a value for xxxx.

In[∘]:=
```
xxxx = 1
```

Out[∘]=
```
1
```

At each place the symbol xxxx appears, it will be replaced with the number on the right hand side.

Moreover, we define a function g that depends at least on one parameter d so that $f[a, b, c][x_p]$ == $g[\ldots, d][x_p]$. In our example we put

In[∘]:=
```
g[c_, d_][x_] := d Exp[c x]
```

We create a list of the integers a, b, c, d that are solutions to system $f'[a, b, c][x_p]$ == 0 and $f[a, b, c][x_p]$ == dExp$[c\, x_p]$.

In[∘]:=
```
ablistofparameters = Reduce[
  (D[f[a, b, c][x], x] == 0 /. x → xxxx) && (f[a, b, c][x] == g[c, d][x] /. x → xxxx) &&
   -6 < a < 6 && -6 < b < 6, {a, b, c, d}, Integers]
```

Out[∘]=
```
(a == -5 && b == -3 && c == -1 && d == -7) || (a == -5 && b == 3 && c == -7 && d == -1) ||
 (a == -5 && b == 5 && c == 7 && d == 1) || (a == -4 && b == -2 && c == -1 && d == -5) ||
 (a == -4 && b == 2 && c == -5 && d == -1) || (a == -4 && b == 4 && c == 5 && d == 1) ||
 (a == -3 && b == -1 && c == -1 && d == -3) || (a == -3 && b == 1 && c == -3 && d == -1) ||
 (a == -3 && b == 3 && c == 3 && d == 1) || (a == -3 && b == 5 && c == 1 && d == 3) ||
 (a == -2 && b == 0 && c == -1 && d == -1) || (a == -2 && b == 2 && c == 1 && d == 1) ||
 (a == -1 && b == -1 && c == 1 && d == -1) || (a == -1 && b == 1 && c == -1 && d == 1) ||
 (a == 0 && b == -4 && c == 1 && d == -3) || (a == 0 && b == -2 && c == 3 && d == -1) ||
 (a == 0 && b == 0 && c == -3 && d == 1) || (a == 0 && b == 2 && c == -1 && d == 3) ||
 (a == 1 && b == -3 && c == 5 && d == -1) || (a == 1 && b == -1 && c == -5 && d == 1) ||
 (a == 1 && b == 3 && c == -1 && d == 5) || (a == 2 && b == -4 && c == 7 && d == -1) ||
 (a == 2 && b == -2 && c == -7 && d == 1) || (a == 2 && b == 4 && c == -1 && d == 7) ||
 (a == 3 && b == -5 && c == 9 && d == -1) || (a == 3 && b == -3 && c == -9 && d == 1) ||
 (a == 3 && b == -1 && c == -3 && d == 3) || (a == 3 && b == 5 && c == -1 && d == 9) ||
 (a == 4 && b == -4 && c == -11 && d == 1) || (a == 5 && b == -5 && c == -13 && d == 1)
```

How many exercises we get?

In[∘]:=
```
Length[ablistofparameters]
```

Out[∘]=
```
30
```

ablist is a simplified form of ablistofparameters :

In[∘]:=
```
ablist = Map[{#[[1, 2]], #[[2, 2]], #[[3, 2]], #[[4, 2]]} &, ablistofparameters]
```

Out[∘]=
```
{-5, -3, -1, -7} || {-5, 3, -7, -1} || {-5, 5, 7, 1} || {-4, -2, -1, -5} ||
 {-4, 2, -5, -1} || {-4, 4, 5, 1} || {-3, -1, -1, -3} || {-3, 1, -3, -1} ||
 {-3, 3, 3, 1} || {-3, 5, 1, 3} || {-2, 0, -1, -1} || {-2, 2, 1, 1} ||
 {-1, -1, 1, -1} || {-1, 1, -1, 1} || {0, -4, 1, -3} || {0, -2, 3, -1} ||
 {0, 0, -3, 1} || {0, 2, -1, 3} || {1, -3, 5, -1} || {1, -1, -5, 1} || {1, 3, -1, 5} ||
 {2, -4, 7, -1} || {2, -2, -7, 1} || {2, 4, -1, 7} || {3, -5, 9, -1} ||
 {3, -3, -9, 1} || {3, -1, -3, 3} || {3, 5, -1, 9} || {4, -4, -11, 1} || {5, -5, -13, 1}
```

Finally, for given c, d we compute values of $g[c, d][x_p]$ == d $e^{c x_p}$:

In[∘]:=
```
valuesat1 =
 Table[ Map[ g[#[[3]], #[[4]] ][xxxx] &, ablist][[r]], {r, 1, Length[ablist]}]
```

Out[∘]=
$$\left\{-\frac{7}{e}, -\frac{1}{e^7}, e^7, -\frac{5}{e}, -\frac{1}{e^5}, e^5, -\frac{3}{e}, -\frac{1}{e^3}, e^3, 3e, -\frac{1}{e}, e, -e, \frac{1}{e}, -3e, -e^3, \frac{1}{e^3}, \frac{3}{e}, -e^5, \frac{1}{e^5}, \frac{5}{e}, -e^7, \frac{1}{e^7}, \frac{7}{e}, -e^9, \frac{1}{e^9}, \frac{3}{e^3}, \frac{9}{e}, \frac{1}{e^{11}}, \frac{1}{e^{13}}\right\}$$

For students

Fix the values of c and d. For what values of the parameters a, b function f has a local extrema at a point

x_p and $f[a, b, c][x_p]$ == dExp[c x_p]? Test the type of extrema.

In the next three steps we define the right hand sides of the formulas defining the function f in the form presented to students. To simplify we write f[x] rather then f[a,b,c][x].
Firstly, in ablist we insert symbolic values of the first two parameters.

In[∘]:=
```
ablistlong =
 Apply[Replace[{#1, #2, #3, #4}, {#1, #2, #3, #4} → {a, b, #3, #4}] &,  ablist, {1}]
```

Out[∘]=
```
{a, b, -1, -7} || {a, b, -7, -1} || {a, b, 7, 1} || {a, b, -1, -5} || {a, b, -5, -1} ||
 {a, b, 5, 1} || {a, b, -1, -3} || {a, b, -3, -1} || {a, b, 3, 1} || {a, b, 1, 3} ||
 {a, b, -1, -1} || {a, b, 1, 1} || {a, b, 1, -1} || {a, b, -1, 1} || {a, b, 1, -3} ||
 {a, b, 3, -1} || {a, b, -3, 1} || {a, b, -1, 3} || {a, b, 5, -1} || {a, b, -5, 1} ||
 {a, b, -1, 5} || {a, b, 7, -1} || {a, b, -7, 1} || {a, b, -1, 7} || {a, b, 9, -1} ||
 {a, b, -9, 1} || {a, b, -3, 3} || {a, b, -1, 9} || {a, b, -11, 1} || {a, b, -13, 1}
```

Secondly, we reject the numerical value of the parameter d.

In[∘]:=
```
ablistshort = Map[ Take[#, {1, 3}] &, ablistlong]
```

Out[∘]=
```
{a, b, -1} || {a, b, -7} || {a, b, 7} || {a, b, -1} || {a, b, -5} || {a, b, 5} ||
 {a, b, -1} || {a, b, -3} || {a, b, 3} || {a, b, 1} || {a, b, -1} || {a, b, 1} ||
 {a, b, 1} || {a, b, -1} || {a, b, 1} || {a, b, 3} || {a, b, -3} || {a, b, -1} ||
 {a, b, 5} || {a, b, -5} || {a, b, -1} || {a, b, 7} || {a, b, -7} || {a, b, -1} ||
 {a, b, 9} || {a, b, -9} || {a, b, -3} || {a, b, -1} || {a, b, -11} || {a, b, -13}
```

Finally, we obtain the formulas for functions that depends on two parameters.

In[∘]:=
```
ablistofrighthandsides  = Apply[f[#1, #2, #3][x] &, ablistshort, {1}]
```

Out[∘]=

$$e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-7x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{7x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-5x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{5x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-3x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{3x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{3x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-3x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{5x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-5x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{7x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{-7x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{9x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-9x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||$$
$$e^{-3x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-11x}\left(b+a x^2+x^3\right) \,||\, e^{-13x}\left(b+a x^2+x^3\right)$$

Now we are in a position to create a set of exercises with an instruction for students. Here the instruction is in Polish.

In[ ]:=
```
Do[ {Print[Style[r, Bold]],
  Print["Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w
     punkcie xp ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną
     wartość f[xp]? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?"],
  Print[ f[x] == ablistofrighthandsides[[r]] ], Print[xp == xxxx] ×
   Print[f[xxxx] == valuesat1[[r]] ] }, {r, 1, Length[ablistofrighthandsides]}]
```

1

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x} (b + a x^2 + x^3)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{7}{e}$

2

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-7x} (b + a x^2 + x^3)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{1}{e^7}$

3

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{7x} (b + a x^2 + x^3)$

$x_p == 1$

$f[1] == e^7$

4

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x} (b + a x^2 + x^3)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{5}{e}$

5

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-5x} (b + a x^2 + x^3)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{1}{e^5}$

6

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{5x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == e^5$

7

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{3}{e}$

8

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-3x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{1}{e^3}$

9

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{3x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == e^3$

10

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == 3\,e$

11

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -\frac{1}{e}$

12

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^x \left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == e$

13

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^x \left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -e$

14

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x} \left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e}$

15

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^x \left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -3 e$

16

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{3x} \left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -e^3$

17

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-3x} \left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e^3}$

18

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{3}{e}$

19

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{5x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -e^5$

20

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-5x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e^5}$

21

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{5}{e}$

22

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{7x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -e^7$

23

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-7x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e^7}$

24

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{7}{e}$

25

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{9x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == -e^9$

26

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-9x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e^9}$

27

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-3x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{3}{e^3}$

28

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{9}{e}$

29

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-11x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e^{11}}$

30

Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja f ma w punkcie x_p ekstremum lokalne w którym przyjmuje zadaną wartość $f[x_p]$? Jakiego rodzaju jest to ekstremum?

$f[x] == e^{-13x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$x_p == 1$

$f[1] == \frac{1}{e^{13}}$

Answers

We begin to create a list of answers to exercises. For the function under consideration the list abfprim of f'[x] that depends on a, b, c is presented in the simplified form. For other functions these may present f'[x] in the form not so convenient.

In[∘]:=
```
abfprim = Module[ {aa, bb, cc}, aa = Map[ D[#, x] &, ablistofrighthandsides];
  bb = Map[Collect[#, E^aa_] & , Expand[aa]];
   Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bb[[r]], 2], {r, 1, Length[bb]}]]
```

Out[∘]=

$$\{e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),\ e^{-7x}(-7b+2ax+(3-7a)x^2-7x^3),$$
$$e^{7x}(7b+2ax+(3+7a)x^2+7x^3),\ e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),$$
$$e^{-5x}(-5b+2ax+(3-5a)x^2-5x^3),\ e^{5x}(5b+2ax+(3+5a)x^2+5x^3),$$
$$e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),\ e^{-3x}(-3b+2ax+(3-3a)x^2-3x^3),$$
$$e^{3x}(3b+2ax+(3+3a)x^2+3x^3),\ e^{x}(b+2ax+(3+a)x^2+x^3),$$
$$e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),\ e^{x}(b+2ax+(3+a)x^2+x^3),$$
$$e^{x}(b+2ax+(3+a)x^2+x^3),\ e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),$$
$$e^{x}(b+2ax+(3+a)x^2+x^3),\ e^{3x}(3b+2ax+(3+3a)x^2+3x^3),$$
$$e^{-3x}(-3b+2ax+(3-3a)x^2-3x^3),\ e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),$$
$$e^{5x}(5b+2ax+(3+5a)x^2+5x^3),\ e^{-5x}(-5b+2ax+(3-5a)x^2-5x^3),$$
$$e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),\ e^{7x}(7b+2ax+(3+7a)x^2+7x^3),$$
$$e^{-7x}(-7b+2ax+(3-7a)x^2-7x^3),\ e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),$$
$$e^{9x}(9b+2ax+(3+9a)x^2+9x^3),\ e^{-9x}(-9b+2ax+(3-9a)x^2-9x^3),$$
$$e^{-3x}(-3b+2ax+(3-3a)x^2-3x^3),\ e^{-x}(-b+2ax+(3-a)x^2-x^3),$$
$$e^{-11x}(-11b+2ax+(3-11a)x^2-11x^3),\ e^{-13x}(-13b+2ax+(3-13a)x^2-13x^3)\}$$

We compute values of a and b that satisfy conditions of the problem.

In[∘]:=
```
valuesofaandb = Module[ {aaa, bbb, ccc, ddd}, aaa = abfprim /. x → xxxx;
  bbb = ablistofrighthandsides /. x → xxxx;
Table[ Reduce[aaa[[r]] == 0 && bbb[[r]] == valuesat1[[r]], {a, b}],
   {r, 1, Length[abfprim]}]]
```

Out[∘]=

$$\{a==-5\,\&\&\,b==-3,\ a==-5\,\&\&\,b==3,\ a==-5\,\&\&\,b==5,\ a==-4\,\&\&\,b==-2,\ a==-4\,\&\&\,b==2,$$
$$a==-4\,\&\&\,b==4,\ a==-3\,\&\&\,b==-1,\ a==-3\,\&\&\,b==1,\ a==-3\,\&\&\,b==3,\ a==-3\,\&\&\,b==5,$$
$$a==-2\,\&\&\,b==0,\ a==-2\,\&\&\,b==2,\ a==-1\,\&\&\,b==-1,\ a==-1\,\&\&\,b==1,\ a==0\,\&\&\,b==-4,$$
$$a==0\,\&\&\,b==-2,\ a==0\,\&\&\,b==0,\ a==0\,\&\&\,b==2,\ a==1\,\&\&\,b==-3,\ a==1\,\&\&\,b==-1,$$
$$a==1\,\&\&\,b==3,\ a==2\,\&\&\,b==-4,\ a==2\,\&\&\,b==-2,\ a==2\,\&\&\,b==4,\ a==3\,\&\&\,b==-5,$$
$$a==3\,\&\&\,b==-3,\ a==3\,\&\&\,b==-1,\ a==3\,\&\&\,b==5,\ a==4\,\&\&\,b==-4,\ a==5\,\&\&\,b==-5\}$$

After the appropriate values of a and b being substituted we compute f''[x].

In[∘]:=
```
abfbis = Module[ {aaa, bbb, ccc},
  ccc = Table[(abfprim[[r]] /. a → valuesofaandb[[r, 1, 2]] ) /.
     b -> valuesofaandb[[r, 2, 2]], {r, 1, Length[abfprim]}];
   aaa = Map[ D[#, x] &, ccc] // Factor]
```

Out[∘]=

$$\left\{e^{-x}\left(-13+26x-11x^2+x^3\right),\ e^{-7x}\left(137+146x-287x^2+49x^3\right),\ e^{7x}\left(235-134x-203x^2+49x^3\right),\ e^{-x}\left(-10+22x-10x^2+x^3\right),\ e^{-5x}\left(42+86x-130x^2+25x^3\right),\ e^{5x}\left(92-74x-70x^2+25x^3\right),\ e^{-x}\left(-7+18x-9x^2+x^3\right),\ 3e^{-3x}\left(1+14x-15x^2+3x^3\right),\ 3e^{3x}\left(7-10x-3x^2+3x^3\right),\ e^{x}\left(-1-6x+3x^2+x^3\right),\ e^{-x}(-2+x)\left(2-6x+x^2\right),\ e^{x}\left(-2-2x+4x^2+x^3\right),\ e^{x}\left(-3+2x+5x^2+x^3\right),\ e^{-x}\left(-1+10x-7x^2+x^3\right),\ e^{x}(2+x)\left(-2+4x+x^2\right),\ 3e^{3x}\left(-6+2x+6x^2+3x^3\right),\ 3e^{-3x}x\left(2-6x+3x^2\right),\ e^{-x}\left(2+6x-6x^2+x^3\right),\ e^{5x}\left(-73+26x+55x^2+25x^3\right),\ e^{-5x}\left(-23-14x-5x^2+25x^3\right),\ e^{-x}\left(5+2x-5x^2+x^3\right),\ e^{7x}\left(-192+62x+140x^2+49x^3\right),\ e^{-7x}\left(-94-50x+56x^2+49x^3\right),\ e^{-x}(-4+x)\left(-2+x^2\right),\ 3e^{9x}\left(-133+38x+99x^2+27x^3\right),\ 3e^{-9x}\left(-79-34x+63x^2+27x^3\right),\ 3e^{-3x}\left(-1-10x+3x^2+3x^3\right),\ e^{-x}\left(11-6x-3x^2+x^3\right),\ e^{-11x}\left(-476-170x+418x^2+121x^3\right),\ e^{-13x}\left(-835-254x+767x^2+169x^3\right)\right\}$$

We compute $f''[x_p]$.

In[∘]:=
```
valuesofabfbis = abfbis /. x → xxxx
```

Out[∘]=

$$\left\{\frac{3}{e},\ \frac{45}{e^7},\ -53e^7,\ \frac{3}{e},\ \frac{23}{e^5},\ -27e^5,\ \frac{3}{e},\ \frac{9}{e^3},\ -9e^3,\ -3e,\ \frac{3}{e},\ e,\ 5e,\ \frac{3}{e},\ 9e,\ 15e^3,\ -\frac{3}{e^3},\ \frac{3}{e},\ 33e^5,\ -\frac{17}{e^5},\ \frac{3}{e},\ 59e^7,\ -\frac{39}{e^7},\ \frac{3}{e},\ 93e^9,\ -\frac{69}{e^9},\ -\frac{15}{e^3},\ \frac{3}{e},\ -\frac{107}{e^{11}},\ -\frac{153}{e^{13}}\right\}$$

minmaks determines the type of extrema.

In[∘]:=
```
minmaks =
 Table[ {valuesofabfbis[[r]], Which[valuesofabfbis[[r]] < 0, "Maksimum lokalne",
    valuesofabfbis[[r]] > 0, "Minimum lokalne", valuesofabfbis[[r]] == 0,
    "nie rozstrzyga"] }, {r, 1, Length[valuesofabfbis]}]
```

Out[∘]=

$$\left\{\left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \left\{\frac{45}{e^7}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \{-53\, e^7, \text{Maksimum lokalne}\},\right.$$
$$\left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \left\{\frac{23}{e^5}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \{-27\, e^5, \text{Maksimum lokalne}\},$$
$$\left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \left\{\frac{9}{e^3}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \{-9\, e^3, \text{Maksimum lokalne}\},$$
$$\{-3\, e, \text{Maksimum lokalne}\}, \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \{e, \text{Minimum lokalne}\},$$
$$\{5\, e, \text{Minimum lokalne}\}, \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \{9\, e, \text{Minimum lokalne}\},$$
$$\{15\, e^3, \text{Minimum lokalne}\}, \left\{-\frac{3}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\},$$
$$\{33\, e^5, \text{Minimum lokalne}\}, \left\{-\frac{17}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\},$$
$$\{59\, e^7, \text{Minimum lokalne}\}, \left\{-\frac{39}{e^7}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\},$$
$$\{93\, e^9, \text{Minimum lokalne}\}, \left\{-\frac{69}{e^9}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, \left\{-\frac{15}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\},$$
$$\left.\left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}, \left\{-\frac{107}{e^{11}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, \left\{-\frac{153}{e^{13}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$$

List of answers (in Polish):

In[∘]:=
```
Do[ {Print[Style[r, Bold]], Print["Funkcja, f[xp] oraz pochodna:"],
   Print[ f[x] == ablistofrighthandsides[[r]] ] ,
   Print[f[xxxx] == valuesat1[[r]] ],
   Print[f'[x] == abfprim[[r]] ],
   Print["Wartości parametrów dla których f'[xp] == 0, f[xp]==g[c,d][xp]:"],
   Print[Table[ablistofparameters [[r, s]], {s, 1, 4}]],
   Print["Pochodna rzędu drugiego:"],
    Print[ f''[x] == abfbis[[r]]],
   Print["Rodzaj ekstremum:"], Print[f''[xxxx] == minmaks[[r]] ]},
  {r, 1, Length[minmaks]}]
```

1

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{7}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2 a x + (3 - a) x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -5, b == -3, c == -1, d == -7\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-13 + 26\,x - 11\,x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

2

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-7\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{1}{e^7}$

$f'[x] == e^{-7\,x}\left(-7\,b + 2\,a\,x + (3 - 7\,a)\,x^2 - 7\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -5,\ b == 3,\ c == -7,\ d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-7\,x}\left(137 + 146\,x - 287\,x^2 + 49\,x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{45}{e^7}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

3

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{7\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == e^7$

$f'[x] == e^{7\,x}\left(7\,b + 2\,a\,x + (3 + 7\,a)\,x^2 + 7\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -5,\ b == 5,\ c == 7,\ d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{7\,x}\left(235 - 134\,x - 203\,x^2 + 49\,x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-53\,e^7, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

4

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{5}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2\,a\,x + (3 - a)\,x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -4,\ b == -2,\ c == -1,\ d == -5\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-10 + 22\,x - 10\,x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

5

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-5x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{1}{e^5}$

$f'[x] == e^{-5x}\left(-5 b + 2 a x + (3 - 5 a) x^2 - 5 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -4, b == 2, c == -5, d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-5x}\left(42 + 86 x - 130 x^2 + 25 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{23}{e^5}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

6

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{5x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == e^5$

$f'[x] == e^{5x}\left(5 b + 2 a x + (3 + 5 a) x^2 + 5 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -4, b == 4, c == 5, d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{5x}\left(92 - 74 x - 70 x^2 + 25 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-27 e^5, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

7

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{3}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2 a x + (3 - a) x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -3, b == -1, c == -1, d == -3\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-7 + 18 x - 9 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

8

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-3x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{1}{e^3}$

$f'[x] == e^{-3x}\left(-3 b + 2 a x + (3 - 3 a) x^2 - 3 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -3, b == 1, c == -3, d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3 e^{-3x}\left(1 + 14 x - 15 x^2 + 3 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{9}{e^3}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

9

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{3x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == e^3$

$f'[x] == e^{3x}\left(3 b + 2 a x + (3 + 3 a) x^2 + 3 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -3, b == 3, c == 3, d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3 e^{3x}\left(7 - 10 x - 3 x^2 + 3 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-9 e^3, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

10

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == 3 e$

$f'[x] == e^{x}\left(b + 2 a x + (3 + a) x^2 + x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == -3, b == 5, c == 1, d == 3\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-1 - 6 x + 3 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \{-3 e, \text{Maksimum lokalne}\}$

11

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -\frac{1}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2\,a\,x + (3 - a)\,x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p] == g[c,d][x_p]$:

$\{a == -2,\ b == 0,\ c == -1,\ d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\,(-2 + x)\,\left(2 - 6\,x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

12

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == e$

$f'[x] == e^{x}\left(b + 2\,a\,x + (3 + a)\,x^2 + x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p] == g[c,d][x_p]$:

$\{a == -2,\ b == 2,\ c == 1,\ d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-2 - 2\,x + 4\,x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \{e, \text{Minimum lokalne}\}$

13

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -e$

$f'[x] == e^{x}\left(b + 2\,a\,x + (3 + a)\,x^2 + x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p] == g[c,d][x_p]$:

$\{a == -1,\ b == -1,\ c == 1,\ d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-3 + 2\,x + 5\,x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \{5\,e, \text{Minimum lokalne}\}$

14

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2\,a\,x + (3 - a)\,x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p] == g[c,d][x_p]$:

$\{a == -1,\ b == 1,\ c == -1,\ d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-1 + 10\,x - 7\,x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e},\ \text{Minimum lokalne}\right\}$

15

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -3\,e$

$f'[x] == e^{x}\left(b + 2\,a\,x + (3 + a)\,x^2 + x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 0,\ b == -4,\ c == 1,\ d == -3\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\,(2 + x)\left(-2 + 4\,x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \{9\,e,\ \text{Minimum lokalne}\}$

16

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{3\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -e^{3}$

$f'[x] == e^{3\,x}\left(3\,b + 2\,a\,x + (3 + 3\,a)\,x^2 + 3\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 0,\ b == -2,\ c == 3,\ d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3\,e^{3\,x}\left(-6 + 2\,x + 6\,x^2 + 3\,x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{15\,e^{3},\ \text{Minimum lokalne}\right\}$

17

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-3\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e^{3}}$

$f'[x] == e^{-3\,x}\left(-3\,b + 2\,a\,x + (3 - 3\,a)\,x^2 - 3\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 0,\ b == 0,\ c == -3,\ d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3\,e^{-3\,x}\,x\left(2 - 6\,x + 3\,x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{3}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

18

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{3}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2 a x + (3 - a) x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 0, b == 2, c == -1, d == 3\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(2 + 6 x - 6 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

19

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{5 x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -e^5$

$f'[x] == e^{5 x}\left(5 b + 2 a x + (3 + 5 a) x^2 + 5 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 1, b == -3, c == 5, d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{5 x}\left(-73 + 26 x + 55 x^2 + 25 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{33 e^5, \text{Minimum lokalne}\right\}$

20

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-5 x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e^5}$

$f'[x] == e^{-5 x}\left(-5 b + 2 a x + (3 - 5 a) x^2 - 5 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 1, b == -1, c == -5, d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-5 x}\left(-23 - 14 x - 5 x^2 + 25 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{17}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

21

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{5}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2 a x + (3 - a) x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 1, b == 3, c == -1, d == 5\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(5 + 2 x - 5 x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

22

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{7 x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -e^7$

$f'[x] == e^{7 x}\left(7 b + 2 a x + (3 + 7 a) x^2 + 7 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 2, b == -4, c == 7, d == -1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{7 x}\left(-192 + 62 x + 140 x^2 + 49 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{59 e^7, \text{Minimum lokalne}\right\}$

23

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-7 x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e^7}$

$f'[x] == e^{-7 x}\left(-7 b + 2 a x + (3 - 7 a) x^2 - 7 x^3\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_p] == 0$, $f[x_p]==g[c,d][x_p]$:

$\{a == 2, b == -2, c == -7, d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-7 x}\left(-94 - 50 x + 56 x^2 + 49 x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{39}{e^7}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

24

Funkcja, $f[x_p]$ oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{7}{e}$

$f'[x] == e^{-x}\left(-b + 2\,a\,x + (3 - a)\,x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

{a == 2, b == 4, c == -1, d == 7}

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\,(-4 + x)\,\left(-2 + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

25

Funkcja, f[x_p] oraz pochodna:

$f[x] == e^{9\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == -e^9$

$f'[x] == e^{9\,x}\left(9\,b + 2\,a\,x + (3 + 9\,a)\,x^2 + 9\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

{a == 3, b == -5, c == 9, d == -1}

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3\,e^{9\,x}\left(-133 + 38\,x + 99\,x^2 + 27\,x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{93\,e^9, \text{Minimum lokalne}\right\}$

26

Funkcja, f[x_p] oraz pochodna:

$f[x] == e^{-9\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e^9}$

$f'[x] == e^{-9\,x}\left(-9\,b + 2\,a\,x + (3 - 9\,a)\,x^2 - 9\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

{a == 3, b == -3, c == -9, d == 1}

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3\,e^{-9\,x}\left(-79 - 34\,x + 63\,x^2 + 27\,x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{69}{e^9}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

27

Funkcja, f[x_p] oraz pochodna:

$f[x] == e^{-3\,x}\left(b + a\,x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{3}{e^3}$

$f'[x] == e^{-3\,x}\left(-3\,b + 2\,a\,x + (3 - 3\,a)\,x^2 - 3\,x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

$\{a == 3, b == -1, c == -3, d == 3\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == 3\, e^{-3x} \left(-1 - 10\, x + 3\, x^2 + 3\, x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{15}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

28

Funkcja, f[x_p] oraz pochodna:

$f[x] == e^{-x} \left(b + a\, x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{9}{e}$

$f'[x] == e^{-x} \left(-b + 2\, a\, x + (3 - a)\, x^2 - x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

$\{a == 3, b == 5, c == -1, d == 9\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x} \left(11 - 6\, x - 3\, x^2 + x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{\frac{3}{e}, \text{Minimum lokalne}\right\}$

29

Funkcja, f[x_p] oraz pochodna:

$f[x] == e^{-11x} \left(b + a\, x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e^{11}}$

$f'[x] == e^{-11x} \left(-11\, b + 2\, a\, x + (3 - 11\, a)\, x^2 - 11\, x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

$\{a == 4, b == -4, c == -11, d == 1\}$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-11x} \left(-476 - 170\, x + 418\, x^2 + 121\, x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{107}{e^{11}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

30

Funkcja, f[x_p] oraz pochodna:

$f[x] == e^{-13x} \left(b + a\, x^2 + x^3\right)$

$f[1] == \frac{1}{e^{13}}$

$f'[x] == e^{-13x} \left(-13\, b + 2\, a\, x + (3 - 13\, a)\, x^2 - 13\, x^3\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_p] == 0, f[x_p]==g[c,d][x_p]:

{a == 5, b == -5, c == -13, d == 1}

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-13x}\left(-835 - 254x + 767x^2 + 169x^3\right)$

Rodzaj ekstremum:

$f''[1] == \left\{-\frac{153}{e^{13}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}$

Clear all definitions.

In[∘]:=
```
Clear[f, xxxx, g, ablistofparameters, ablist, valuesat1,
 ablistlong, ablistshort, ablistofrighthandsides , abfprim,
 , valuesofaandb, abfbis, valuesofabfbis, minmaks]
```

Clear: Symbol Null is Protected.

Tips for user

The following quantities can be changed by the user:
1) the stationary point x_p;
2) the ranges of parameters a and b; these can be done inside the code ablistofparameters;
3) the functions f and g; each time g should be matched to f to make the numerical computations easy; for example the pair f[a,b,c][x] == a x^5 + b x^3 + c x, g[c,d][x] == d fits well and with x == 1 gives 121 results.

4 Problem 3

For what values of the parameters a, b function f has local extrema at two fixed points? Test the type of the local extrema.

Preliminaries

Define a function f of real variable x that depends on three real parameters a, b, c:

In[∘]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := (x^2 + a x + b) Exp[c x]
```

For fixed x_1, x_2 we look for values of parameters a, b, c satisfying two conditions: $f'[a, b, c][x_1] == 0$ and $f'[a, b, c][x_2] == 0$, under assumptions that |a| < 10, |b| < 10, a being integer, b, c rational. These assumptions, in particularity the length of intervals, can be changed.

In[∘]:=
```
D[f[a, b, c][x], x] // Factor
```

Out[∘]= $e^{c x}\left(a + b c + 2 x + a c x + c x^2\right)$

The function tt[xx, yy] finds the values of parameters a, b, c that xx and yy are stationary points of f.

In[∘]:=
```
tt[xx_, yy_] := Module[ {aaa, bbb, ccc}, aaa =
   Reduce[ (D[f[a, b, c][x], x] == 0 /. x → xx) && (D[f[a, b, c][x], x] == 0 /. x → yy) &&
     Apply[Or, Table[ a == r, {r, -10, 10}]] && -10 < b < 10, {a, b, c}, Rationals];
  Table[ x1 == xx && x2 == yy && aaa[[r]], {r, 1, Length[aaa]}] ]
```

Put $x_1 == -1$, $x_2 == 4$. We check if the triples of respective values of parameters are determined uniquely as well as the number of exercises we get would be satisfactory.

In[∘]:=
```
tt[-1, 4]
```

Out[∘]=

$$\left\{x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == -6 \,\&\&\, b == 5 \,\&\&\, c == \frac{2}{3},\ x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == -5 \,\&\&\, b == 1 \,\&\&\, c == 1,\right.$$
$$x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == -4 \,\&\&\, b == -2 \,\&\&\, c == 2,\ x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == -2 \,\&\&\, b == -5 \,\&\&\, c == -2,$$
$$x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == -1 \,\&\&\, b == -5 \,\&\&\, c == -1,$$
$$x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == 0 \,\&\&\, b == -4 \,\&\&\, c == -\frac{2}{3},\ x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == 1 \,\&\&\, b == -2 \,\&\&\, c == -\frac{1}{2},$$
$$\left. x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == 2 \,\&\&\, b == 1 \,\&\&\, c == -\frac{2}{5},\ x_1 == -1 \,\&\&\, x_2 == 4 \,\&\&\, a == 3 \,\&\&\, b == 5 \,\&\&\, c == -\frac{1}{3}\right\}$$

How many exercises we get?

In[∘]:=
```
Length[%]
```

Out[∘]=
```
9
```

For students

In[∘]:=
```
ForStudents[xx_, yy_] :=
 Module[ { lista, ablista, alistofrighthandsides          },

  "lista is a list of sequences that consist of stationary
    points and numerical values of the parameters a, b, c";
  lista = Map[{#[[1, 2]], #[[2, 2]], #[[3, 2]], #[[4, 2]], #[[5, 2]]} &,
    tt[xx, yy] ];

  "ablist is a list of sequences that consist of stationary points and symbolic
    values of parameters a, b, c being replaced with numerical ones";
  ablist = Apply[Replace[{#1, #2, #3, #4, #5},
      {#1, #2, #3, #4, #5} → {#1, #2, a, b, #5}] &,  lista, {1}];

  "alistofrighthandsides is a list of right hand sides of functions";
  alistofrighthandsides  = Apply[f[#3, #4, #5][x] &, ablist, {1}];

  "instruction for students (in Polish)";
  Do[
   {Print[Style[r, Bold]], Print[" Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja f
       ma ekstrema lokalne w punktach x1, x2 ? Jakiego rodzaju?"],
    Print[ f[x] == alistofrighthandsides[[r]] ] , Print[{x1 == xx, x2 == yy}]},
   {r, 1, Length[alistofrighthandsides]}]]
```

In[∘]:=
```
ForStudents[-1, 4]
```

1

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{2x/3}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

2

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

3

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

4

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

5

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

6

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-2x/3}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

7

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x/2}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

8

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-2x/5}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

9

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x/3}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -1,\ x_2 == 4\}$

Answers

In[ ]:=

```
ForTeacher[xx_, yy_] :=
 Module[ {lista, ablist, alistofrighthandsides, aaa, bbb, abfprimsimp, ccc, ddd,
   valuesofab, abfbissimp , fbisatxx, fbisatyy, minmaksxx, minmaksyy, eee, fff, ggg},

  "lista is a list of sequences that consist of stationary
    points and numerical values of the parameters a, b, c";
  lista = Map[{#[[1, 2]], #[[2, 2]], #[[3, 2]], #[[4, 2]], #[[5, 2]]} &,
    tt[xx, yy] ];

  "ablist is a list of sequences that consist of stationary points and symbolic
    values of parameters a, b, c being replaced with numerical ones";
  ablist = Apply[Replace[{#1, #2, #3, #4, #5},
      {#1, #2, #3, #4, #5} → {#1, #2, a, b, #5}] &,  lista, {1}];

  "alistofrighthandsides is a list of right hand sides of functions";
  alistofrighthandsides = Apply[f[#3, #4, #5][x] &, ablist, {1}];

  "we create a list abfprimsimp of simplified derivatives of the first order";
  aaa = Map[ D[#, x] &, alistofrighthandsides];
  bbb = Map[Collect[#, E^aa_] & , Expand[aaa ]];
  abfprimsimp = Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bbb[[r]], 2], {r, 1, Length[bbb]}];

  "we compute the values of the parameters a, b,
    c that satisfy f'[a,b,c][xx] == 0 and f'[a,b,c][yy] == 0";
  ccc = abfprimsimp /. x → xx;
  ddd = abfprimsimp /. x → yy;
  valuesofab =
   Table[ Reduce[ccc[[r]] == 0 && ddd[[r]] == 0, {a, b}], {r, 1, Length[bbb]}];

  "abfbissimp is a list of the second order
    derivatives for each set of values of the parameters";
  abfbissimp = Module[ {aa, bb, cc}, cc = Table[
      abfprimsimp[[r]] /. a → valuesofab[[r, 1, 2]] /. b → valuesofab[[r, 2, 2]],
      {r, 1, Length[valuesofab]}];
     aa = Map[ D[#, x] &, cc]; bb = Map[Collect[#, E^aa_] & , Expand[aa]];
     Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bb[[r]], 2], {r, 1, Length[bb]}]];

  "minmaxxx, minmaxyy determine the typ of
    local extrema at given points xx, yy for each function";
  fbisatxx = abfbissimp /. x → xx;
  fbisatyy = abfbissimp /. x → yy;
  minmaksxx = Table[ {fbisatxx[[r]], Which[fbisatxx[[r]] < 0,
      "Maksimum lokalne", fbisatxx[[r]] > 0, "Minimum lokalne",
      fbisatxx[[r]] == 0, "nie rozstrzyga"] }, {r, 1, Length[fbisatxx]}];
  minmaksyy = Table[ {fbisatyy[[r]], Which[fbisatyy[[r]] < 0,
      "Maksimum lokalne", fbisatyy[[r]] > 0, "Minimum lokalne",
```

```
      fbisatyy[[r]] == 0, "nie rozstrzyga"] }, {r, 1, Length[fbisatyy]}];

  "list of answers (in Polish)";

  Do[ {Print[Style[r, Bold]],
    Print["Współrzędne punktów stacjonarnych"],
    Print[{x1 == xx, x2 == yy}],
     Print["Funkcja i jej pochodna:"], Print[ f[x] == alistofrighthandsides[[r]] ] ,
    Print[f'[x] == abfprimsimp[[r]] ],
    Print["Wartości parametrów dla których f'[x1] == 0 i f'[x2] == 0:"],
    Print[valuesofab[[r]] ],
    Print["Pochodna rzędu drugiego:"],
     Print[f''[x] == abfbissimp[[r]] ],
    Print["Rodzaj ekstremum:"],
     Print[{f''[x1] == minmaksxx[[r]] , f''[x1] == minmaksyy[[r]]} ]},
   {r, 1, Length[minmaksxx]}]
 ]
```

In[ ]:=

```
ForTeacher[-1, 4]
```

1

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1,\ x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{2x/3}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{2x/3}\left(a + \frac{2b}{3} + \left(2 + \frac{2a}{3}\right) x + \frac{2x^2}{3}\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_1] == 0$ i $f'[x_2] == 0$:

$a == -6\ \&\&\ b == 5$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{2x/3}\left(-\frac{34}{9} + \frac{4x^2}{9}\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{10}{3 e^{2/3}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_1] == \left\{\frac{10 e^{8/3}}{3}, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

2

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1,\ x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{x}\left(a + b + (2 + a) x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_1] == 0$ i $f'[x_2] == 0$:

$a == -5\ \&\&\ b == 1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-7 - x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{5}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_1] == \left\{5\, e^4, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

3

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{2x}\left(a + 2 b + (2 + 2 a) x + 2 x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -4 \,\&\&\, b == -2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{2x}\left(-22 - 8 x + 4 x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{10}{e^2}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_1] == \left\{10\, e^8, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

4

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-2x}\left(a - 2 b + (2 - 2 a) x - 2 x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -2 \,\&\&\, b == -5$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-2x}\left(-10 - 16 x + 4 x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{10\, e^2, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_1] == \left\{-\frac{10}{e^8}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

5

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a) x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -1 \,\&\&\, b == -5$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-1 - 5 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \{5\,e,\ \text{Minimum lokalne}\},\ f''[x_1] == \left\{-\frac{5}{e^4},\ \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

6

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1,\ x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-2x/3}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-2x/3}\left(a - \frac{2\,b}{3} + \left(2 - \frac{2\,a}{3}\right)x - \frac{2\,x^2}{3}\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 0\ \&\&\ b == -4$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-2x/3}\left(\frac{2}{9} - \frac{8\,x}{3} + \frac{4\,x^2}{9}\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{\frac{10\,e^{2/3}}{3},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ f''[x_1] == \left\{-\frac{10}{3\,e^{8/3}},\ \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

7

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1,\ x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x/2}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x/2}\left(a - \frac{b}{2} + \left(2 - \frac{a}{2}\right)x - \frac{x^2}{2}\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 1\ \&\&\ b == -2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{7\,x}{4} + \frac{x^2}{4}\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{\frac{5\,\sqrt{e}}{2},\ \text{Minimum lokalne}\right\},\ f''[x_1] == \left\{-\frac{5}{2\,e^2},\ \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

8

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1,\ x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-2x/5}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-2x/5}\left(a - \frac{2\,b}{5} + \left(2 - \frac{2\,a}{5}\right)x - \frac{2\,x^2}{5}\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

a == 2 && b == 1

Pochodna rzędu drugiego:

$$f''[x] == e^{-2x/5}\left(\frac{14}{25} - \frac{32x}{25} + \frac{4x^2}{25}\right)$$

Rodzaj ekstremum:

$$\left\{f''[x_1] == \left\{2e^{2/5}, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_1] == \left\{-\frac{2}{e^{8/5}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$$

9

Współrzędne punktów stacjonarnych

$\{x_1 == -1, x_2 == 4\}$

Funkcja i jej pochodna:

$$f[x] == e^{-x/3}\left(b + a x + x^2\right)$$

$$f'[x] == e^{-x/3}\left(a - \frac{b}{3} + \left(2 - \frac{a}{3}\right)x - \frac{x^2}{3}\right)$$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

a == 3 && b == 5

Pochodna rzędu drugiego:

$$f''[x] == e^{-x/3}\left(\frac{5}{9} - x + \frac{x^2}{9}\right)$$

Rodzaj ekstremum:

$$\left\{f''[x_1] == \left\{\frac{5e^{1/3}}{3}, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_1] == \left\{-\frac{5}{3e^{4/3}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$$

Clear all definitions.

In[ ]:=
```
Clear[f, tt, ForStudents, ForTeacher]
```

Tips for user

The following quantities can be changed by the user:
1) the stationary points x_1 , x_2;
2) the ranges of parameters a and b; these can be done inside the code tt[xx_, yy_];
3) the function f.
To run the program:
1) choose stationary points x_1 , x_2;
2) compute tt[x_1 , x_2]; if the result is satisfactory, then
3) compute ForStudents[x_1 , x_2];
4) compute ForTeacher[x_1 , x_2].

5 Problem 3 - random list

Preliminaries

In this section, in connection with the previous one, we present another way of preparing lists of two stationary points and numerical values of parameters, that was in section 4 simply called lista. In the example the range of all integer parameters is <-6,6> and can be changed inside the code.

Define a function.

In[ ]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := (x^2 + a x + b) Exp[c x]
```

In[ ]:=
```
randomlist[aa_, bb_] :=
 Module[{ sss = 6},
  "sss is a local variable that determins the range of all parameters";

"randomlist[aa,bb] repeats aa times trandom[bb] and returns
    one list of integers of the form {ppp1, ppp2, a, b, c}";

  trandom[n_] := Module[ {derivative, ppp1, ppp2 , random, ddd },

    " trandom[n] gives m, 1 ≤ m ≤ n, lists of numbers of the
      form {ppp1, ppp2, a, b, c}, where m, ppp1, ppp2 are fixed,
      independently randomly chosen, a, b, c being solutions to
      the system f'[a,b,c][ppp1] == 0 and f'[a,b,c][ppp2] == 0";

    "derivative is the first derivative of the function f under consideration";
    derivative = D[f[a, b, c][x], x];

    "sample is a randomly chosen pair
      of different integers from the range <-sss,sss>";
    "ppp1 and ppp2 are, respectively, the first and the second element of sample";
    sample = RandomSample[Range[-sss, sss], 2];
    ppp1 = sample[[1]];
    ppp2 = sample[[2]];

    randomn = Random[Integer, {1, n}];
    "random is a randomly chosen number  of solutions to the system
      f'[a,b,c][ppp1] == 0 and f'[a,b,c][ppp2] == 0 to be find";

    ddd = FindInstance[ (derivative /. x → ppp1 ) == 0 &&
       (derivative /. x → ppp2) == 0 , {a, b, c}, Integers, randomn];
    "ddd returns solutions to the system for fixed ppp1 and
      ppp2, the number of solutions is given by random";

    Flatten[ Table[{{ppp1, ppp2, ddd[[r, 1, 2]], ddd[[r, 2, 2]], ddd[[r, 3, 2]]}},
      {r, 1, Length[ddd]} ] , 1] ];
  Flatten[ Join[Table[ trandom[bb], {s, 1, aa}] ], 1 ] ]
```

We must keep in the mind that each time randomlist[aa,bb] runs, it returns different result.

In[∘]:=
```
fine1 = randomlist[4, 3]
```
Out[∘]=
```
{{0, 3, -1, -1, -1}, {-6, 0, 4, -4, 1}, {-6, 0, 8, 8, -1},
 {-5, 3, 0, -15, 1}, {-5, 3, 4, -11, -1}, {1, -3, 0, -3, 1}, {1, -3, 4, 1, -1}}
```

In[∘]:=
```
fine2 = randomlist[4, 3]
```
Out[∘]=
```
{{1, -2, 3, 1, -1}, {1, -2, 2, -1, -2}, {-1, 0, 3, 3, -1},
 {0, 2, 0, 0, -1}, {-4, 1, 5, 1, -1}, {-4, 1, 4, -2, -2}, {-4, 1, 1, -5, 1}}
```

In[∘]:=
```
fine3 = randomlist[6, 3]
```
Out[∘]=
```
{{0, 6, -4, -4, -1}, {2, 6, -10, 22, 1}, {2, 6, -6, 6, -1},
 {4, 5, -7, 13, -1}, {4, 5, -8, 16, -2}, {-5, 3, 0, -15, 1}, {-5, 3, 4, -11, -1},
 {-2, -6, 10, 22, -1}, {3, -5, 0, -15, 1}, {3, -5, 4, -11, -1}}
```

We can form one list.

In[∘]:=
```
onelist = Join[ fine1, fine2, fine3, 1]
```
Out[∘]=
```
{{0, 3, -1, -1, -1}, {-6, 0, 4, -4, 1}, {-6, 0, 8, 8, -1}, {-5, 3, 0, -15, 1},
 {-5, 3, 4, -11, -1}, {1, -3, 0, -3, 1}, {1, -3, 4, 1, -1}, {1, -2, 3, 1, -1},
 {1, -2, 2, -1, -2}, {-1, 0, 3, 3, -1}, {0, 2, 0, 0, -1}, {-4, 1, 5, 1, -1},
 {-4, 1, 4, -2, -2}, {-4, 1, 1, -5, 1}, {0, 6, -4, -4, -1}, {2, 6, -10, 22, 1},
 {2, 6, -6, 6, -1}, {4, 5, -7, 13, -1}, {4, 5, -8, 16, -2}, {-5, 3, 0, -15, 1},
 {-5, 3, 4, -11, -1}, {-2, -6, 10, 22, -1}, {3, -5, 0, -15, 1}, {3, -5, 4, -11, -1}}
```

How many exercises we get?

In[∘]:=
```
Length[onelist]
```
Out[∘]=
```
24
```

For students

An argument to the functions ForStudents and ForTeacher is any list of sequences of five numbers {x_1, x_2, a, b, c}. For example xxx = onelist.

In[ ]:=
```
ForStudents[xxx_] := Module[ { lista, ablista, alistofrighthandsides          },

  "lista is a list of sequences that consist of stationary
    points x1, x2 and numerical values of parameters a, b, c";
  lista = xxx;

  "ablist is a list of sequences that consist of stationary points x1, x2 and
    symbolic values of parameters a, b with c being numerical one";
  ablist = Apply[Replace[{#1, #2, #3, #4, #5},
      {#1, #2, #3, #4, #5} → {#1, #2, a, b, #5}] &,  lista, {1}];

  "alistofrighthandsides is a list of right hand
    sides of functions that depend on the parameters a and b";
  alistofrighthandsides  = Apply[f[#3, #4, #5][x] &, ablist, {1}];

  "instruction for students (in Polish)";

  Do[
   {Print[Style[r, Bold]], Print[" Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja f ma
       ekstrema lokalne w punktach x1, x2 ? Jakiego rodzaju?"],
    Print[ f[x] == alistofrighthandsides[[r]] ] , Print[{x1 == xxx[[r, 1]],
      x2 == xxx[[r, 2]]}]}, {r, 1, Length[alistofrighthandsides]}]]
```

In[ ]:=
```
ForStudents[onelist]
```

1

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == 0, x_2 == 3\}$

2

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -6, x_2 == 0\}$

3

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -6, x_2 == 0\}$

4

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -5, x_2 == 3\}$

5

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == -5, x_2 == 3\}$

6

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == 1, x_2 == -3\}$

7

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == 1, x_2 == -3\}$

8

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == 1, x_2 == -2\}$

9

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-2x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == 1, x_2 == -2\}$

10

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == -1, x_2 == 0\}$

11

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == 0, x_2 == 2\}$

12

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$\{x_1 == -4, x_2 == 1\}$

13

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -4,\ x_2 == 1\}$

14

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -4,\ x_2 == 1\}$

15

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == 0,\ x_2 == 6\}$

16

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == 2,\ x_2 == 6\}$

17

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == 2,\ x_2 == 6\}$

18

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == 4,\ x_2 == 5\}$

19

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == 4,\ x_2 == 5\}$

20

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -5,\ x_2 == 3\}$

21

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$\{x_1 == -5,\ x_2 == 3\}$

22

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$\{x_1 == -2,\ x_2 == -6\}$

23

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$\{x_1 == 3,\ x_2 == -5\}$

24

Dla jakiej wartości parametrów a, b funkcja
f ma ekstrema lokalne w punktach x_1, x_2 ? Jakiego rodzaju?

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$\{x_1 == 3,\ x_2 == -5\}$

Answers

In[ ]:=

```
ForTeacher[xxx_] :=
 Module[ {lista, ablist, alistofrighthandsides, aaa, bbb, abfprimsimp, ccc, ddd,
   valuesofab, abfbissimp , fbisatxx, fbisatyy, minmaksxx, minmaksyy, eee, fff, ggg},

  "lista is a list of sequences that consist of
    stationary points and numerical values of parameters a, b, c";
  lista = xxx;

  "ablist is a list of sequences that consist of stationary points and
    symbolic values of parameters a, b, with c being numerical one";
  ablist = Apply[Replace[{#1, #2, #3, #4, #5},
      {#1, #2, #3, #4, #5} → {#1, #2, a, b, #5}] &,  lista, {1}];

  "alistofrighthandsides is a list of right hand
    sides of functions that depend on the parameters a and b";
  alistofrighthandsides = Apply[f[#3, #4, #5][x] &, ablist, {1}];

  "we create a list abfprimsimp of simplified derivatives of the first order";
  aaa = Map[ D[#, x] &, alistofrighthandsides];
   bbb = Map[Collect[#, E^aa_] & , Expand[aaa ]];
  abfprimsimp = Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bbb[[r]], 2], {r, 1, Length[bbb]}];

  "we compute valuesofab which are the values of the integers a, b, c that satisfy
    f'[a,b,c][x1] == 0 and f'[a,b,c][x2] == 0 for each choice of (x1, x2)";
  ccc = Table[ abfprimsimp[[r]] /. x → xxx[[r, 1]], {r, 1, Length[xxx]}];
  ddd = Table[ abfprimsimp[[r]] /. x → xxx[[r, 2]], {r, 1, Length[xxx]}];
  valuesofab =
   Table[ Reduce[ccc[[r]] == 0 && ddd[[r]] == 0, {a, b}], {r, 1, Length[bbb]}];

  "abfbissimp is a list of the second order
```

```
    derivatives for each set of values of the parameters";
  abfbissimp = Module[ {aa, bb, cc}, cc = Table[
      abfprimsimp[[r]] /. a → valuesofab[[r, 1, 2]] /. b → valuesofab[[r, 2, 2]],
      {r, 1, Length[valuesofab]}];
    aa = Map[ D[#, x] &, cc]; bb = Map[Collect[#, E^aa_] & , Expand[aa]];
    Table[ MapAt[ Collect[#, x^aa_] &, bb[[r]], 2], {r, 1, Length[bb]}]];

  "fbisatx1, fbisatx2 are lists of values of f''[x1] and f''[x2] respectively";
  "minmax1, minmaxx2 determine the typ of
    local extrema at given points x1, x2 for each function";

  fbisatx1 = Table[ (abfbissimp[[r]] /. x → xxx[[r, 1]]), {r, 1, Length[xxx]}];
  fbisatx2 = Table[ abfbissimp[[r]] /. x → xxx[[r, 2]], {r, 1, Length[xxx]}];

  minmaksx1 = Table[ {fbisatx1[[r]], Which[fbisatx1[[r]] < 0,
      "Maksimum lokalne", fbisatx1[[r]] > 0, "Minimum lokalne",
      fbisatx1[[r]] == 0, "nie rozstrzyga"] }, {r, 1, Length[fbisatx1]}];
  minmaksx2 = Table[ {fbisatx2[[r]], Which[fbisatx2[[r]] < 0,
      "Maksimum lokalne", fbisatx2[[r]] > 0, "Minimum lokalne",
      fbisatx2[[r]] == 0, "nie rozstrzyga"] }, {r, 1, Length[fbisatx2]}];

  "list of answers (in Polish)";

  Do[ {Print[Style[r, Bold]],
    Print["Współrzędne punktów stacjonarnych:"],
    Print[{x1 == xxx[[r, 1]], x2 == xxx[[r, 2]]}],
     Print["Funkcja i jej pochodna:"], Print[ f[x] == alistofrighthandsides[[r]] ] ,
    Print[f'[x] == abfprimsimp[[r]] ],
    Print["Wartości parametrów dla których f'[x1] == 0 i f'[x2] == 0:"],
    Print[valuesofab[[r]] ],
    Print["Pochodna rzędu drugiego:"],
     Print[f''[x] == abfbissimp[[r]] ],
    Print["Rodzaj ekstremum:"],
     Print[{f''[x1] == minmaksx1[[r]] , f''[x2] == minmaksx2[[r]]} ]},
   {r, 1, Length[minmaksx1]}]
  ]
```

In[ ]:=

```
ForTeacher[onelist]
```

1

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 0, x_2 == 3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x} (b + a x + x^2)$

$f'[x] == e^{-x} (a - b + (2 - a) x - x^2)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_1] == 0$ i $f'[x_2] == 0$:

$a == -1 \,\&\&\, b == -1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x} (3 - 5 x + x^2)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \{3, \text{Minimum lokalne}\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{3}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

2

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -6, x_2 == 0\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x \left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^x \left(a + b + (2 + a) x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 4 \,\&\&\, b == -4$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(6 + 8 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{6}{e^6}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \{6, \text{Minimum lokalne}\}\right\}$

3

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -6, x_2 == 0\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x} \left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x} \left(a - b + (2 - a) x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 8 \,\&\&\, b == 8$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x} \left(-6 + 4 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{6 e^6, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \{-6, \text{Maksimum lokalne}\}\right\}$

4

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -5, x_2 == 3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x \left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^x \left(a + b + (2 + a) x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 0 \,\&\&\, b == -15$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(-13 + 4 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{8}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{8\, e^3, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

5

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -5, x_2 == 3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a)\,x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 4\ \&\&\ b == -11$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-17 + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{8\, e^5, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{8}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

6

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 1, x_2 == -3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{x}\left(a + b + (2 + a)\,x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 0\ \&\&\ b == -3$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{x}\left(-1 + 4\,x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \{4\, e, \text{Minimum lokalne}\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{4}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

7

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 1, x_2 == -3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a)\,x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 4\ \&\&\ b == 1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-5 + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{4}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{4\, e^3, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

8

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 1, x_2 == -2\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a)\,x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 3\ \&\&\ b == 1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-3 - x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{3}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{3\, e^2, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

9

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 1, x_2 == -2\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-2x}\left(a - 2\,b + (2 - 2\,a)\,x - 2\,x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 2\ \&\&\ b == -1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-2x}\left(-10 + 4\,x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{6}{e^2}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{6\, e^4, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

10

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -1, x_2 == 0\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a)\,x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 3\ \&\&\ b == 3$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-1 - x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\{f''[x_1] == \{e, \text{Minimum lokalne}\}, f''[x_2] == \{-1, \text{Maksimum lokalne}\}\}$

11

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 0, x_2 == 2\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a) x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 0 \,\&\&\, b == 0$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(2 - 4 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \{2, \text{Minimum lokalne}\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{2}{e^2}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

12

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -4, x_2 == 1\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a) x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 5 \,\&\&\, b == 1$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(-7 + x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{5 e^4, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{5}{e}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

13

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -4, x_2 == 1\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-2x}\left(a - 2 b + (2 - 2 a) x - 2 x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 4 \,\&\&\, b == -2$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-2x}\left(-22 + 8 x + 4 x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{10\, e^8, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{10}{e^2}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

14

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -4, x_2 == 1\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x \left(b + a\, x + x^2\right)$

$f'[x] == e^x \left(a + b + (2 + a)\, x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 1 \,\&\&\, b == -5$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(-1 + 5\, x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{5}{e^4}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \{5\, e, \text{Minimum lokalne}\}\right\}$

15

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 0, x_2 == 6\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x} \left(b + a\, x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x} \left(a - b + (2 - a)\, x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -4 \,\&\&\, b == -4$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x} \left(6 - 8\, x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \{6, \text{Minimum lokalne}\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{6}{e^6}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

16

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 2, x_2 == 6\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x \left(b + a\, x + x^2\right)$

$f'[x] == e^x \left(a + b + (2 + a)\, x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -10 \,\&\&\, b == 22$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(4 - 6\, x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\{f''[x_1] == \{-4\, e^2, \text{Maksimum lokalne}\}, f''[x_2] == \{4\, e^6, \text{Minimum lokalne}\}\}$

17

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 2, x_2 == 6\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a)\,x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -6\ \&\&\ b == 6$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(20 - 10\,x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{\frac{4}{e^2}, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{4}{e^6}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

18

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 4, x_2 == 5\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x}\left(a - b + (2 - a)\,x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -7\ \&\&\ b == 13$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\left(29 - 11\,x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{\frac{1}{e^4}, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{1}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

19

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 4, x_2 == 5\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-2x}\left(b + a\,x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-2x}\left(a - 2\,b + (2 - 2\,a)\,x - 2\,x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == -8\ \&\&\ b == 16$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-2x}\left(98 - 40\,x + 4\,x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{\frac{2}{e^8}, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{2}{e^{10}}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

20

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -5, x_2 == 3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x \left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^x \left(a + b + (2 + a) x + x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 0 \,\&\&\, b == -15$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x \left(-13 + 4 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{8}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{8 e^3, \text{Minimum lokalne}\right\}\right\}$

21

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -5, x_2 == 3\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x} \left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x} \left(a - b + (2 - a) x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 4 \,\&\&\, b == -11$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x} \left(-17 + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{8 e^5, \text{Minimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{8}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

22

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == -2, x_2 == -6\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x} \left(b + a x + x^2\right)$

$f'[x] == e^{-x} \left(a - b + (2 - a) x - x^2\right)$

Wartości parametrów dla których f'[x_1] == 0 i f'[x_2] == 0:

$a == 10 \,\&\&\, b == 22$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x} \left(4 + 6 x + x^2\right)$

Rodzaj ekstremum:

$\{f''[x_1] == \{-4\, e^2, \text{Maksimum lokalne}\}, f''[x_2] == \{4\, e^6, \text{Minimum lokalne}\}\}$

23

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 3, x_2 == -5\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^x\,(b + a\,x + x^2)$

$f'[x] == e^x\,(a + b + (2 + a)\,x + x^2)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_1] == 0$ i $f'[x_2] == 0$:

$a == 0\ \&\&\ b == -15$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^x\,(-13 + 4\,x + x^2)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \{8\, e^3, \text{Minimum lokalne}\}, f''[x_2] == \left\{-\frac{8}{e^5}, \text{Maksimum lokalne}\right\}\right\}$

24

Współrzędne punktów stacjonarnych:

$\{x_1 == 3, x_2 == -5\}$

Funkcja i jej pochodna:

$f[x] == e^{-x}\,(b + a\,x + x^2)$

$f'[x] == e^{-x}\,(a - b + (2 - a)\,x - x^2)$

Wartości parametrów dla których $f'[x_1] == 0$ i $f'[x_2] == 0$:

$a == 4\ \&\&\ b == -11$

Pochodna rzędu drugiego:

$f''[x] == e^{-x}\,(-17 + x^2)$

Rodzaj ekstremum:

$\left\{f''[x_1] == \left\{-\frac{8}{e^3}, \text{Maksimum lokalne}\right\}, f''[x_2] == \{8\, e^5, \text{Minimum lokalne}\}\right\}$

Clear all definitions.

In[ ]:=
```
Clear[f, randomlist, fine1, fine2, fine3, onelist, ForStudents, ForTeacher]
```

6 Final remarks

Since our main goal is to create a large list relatively simple exercises of similar type, we must keep in mind that not every family of functions is suitable for that purpose. For example f[a,b,c][x] := $(x^2$ + a x + b) Sin[c $\frac{\pi}{2}$ x] is not suitable for problem 3, as it hardly gives any satisfactory solutions. On the other hand, it works well in the problem 1, however the code must be modified a bit. This can be done by setting in Problem 1

In[∘]:=
```
listofparameters = Reduce[(D[(x^2 + a x + b) Sin[c Pi/2 x], x] == 0 /. x → xxxx) &&
   c == 1 && -5 < a < 5 && -5 < b < 5, {a, b, c}, Integers]
```

Out[∘]=
```
(xxxx == -4 && a == 3 && b == -4 && c == 1) ||
 (xxxx == -4 && a == 4 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == -2 && a == 0 && b == -4 && c == 1) ||
 (xxxx == -2 && a == 1 && b == -2 && c == 1) || (xxxx == -2 && a == 2 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == -2 && a == 3 && b == 2 && c == 1) || (xxxx == -2 && a == 4 && b == 4 && c == 1) ||
 (xxxx == -1 && a == 2 && b == -4 && c == 1) || (xxxx == -1 && a == 2 && b == -3 && c == 1) ||
 (xxxx == -1 && a == 2 && b == -2 && c == 1) || (xxxx == -1 && a == 2 && b == -1 && c == 1) ||
 (xxxx == -1 && a == 2 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == -1 && a == 2 && b == 1 && c == 1) ||
 (xxxx == -1 && a == 2 && b == 2 && c == 1) || (xxxx == -1 && a == 2 && b == 3 && c == 1) ||
 (xxxx == -1 && a == 2 && b == 4 && c == 1) || (xxxx == 0 && a == -4 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == 0 && a == -3 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == 0 && a == -2 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == 0 && a == -1 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == 0 && a == 0 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == 0 && a == 1 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == 0 && a == 2 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == 0 && a == 3 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == 0 && a == 4 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == 1 && a == -2 && b == -4 && c == 1) || (xxxx == 1 && a == -2 && b == -3 && c == 1) ||
 (xxxx == 1 && a == -2 && b == -2 && c == 1) || (xxxx == 1 && a == -2 && b == -1 && c == 1) ||
 (xxxx == 1 && a == -2 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == 1 && a == -2 && b == 1 && c == 1) ||
 (xxxx == 1 && a == -2 && b == 2 && c == 1) || (xxxx == 1 && a == -2 && b == 3 && c == 1) ||
 (xxxx == 1 && a == -2 && b == 4 && c == 1) || (xxxx == 2 && a == -4 && b == 4 && c == 1) ||
 (xxxx == 2 && a == -3 && b == 2 && c == 1) || (xxxx == 2 && a == -2 && b == 0 && c == 1) ||
 (xxxx == 2 && a == -1 && b == -2 && c == 1) || (xxxx == 2 && a == 0 && b == -4 && c == 1) ||
 (xxxx == 4 && a == -4 && b == 0 && c == 1) || (xxxx == 4 && a == -3 && b == -4 && c == 1)
```

In connection with Problem 2 we give an example of function for which the list of parameters is not determined uniquely. Put

In[∘]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := a x^5 + b x^3 + c
```

In[∘]:=
```
g[c, d][x] := d
```

We look for four integers a, b, c, d that satisfy the conditions: $f'[a, b, c][x_p]$ == 0 and $f[a, b, c][x_p]$ == $g[c, d][x_p]$. We suppose |a| < 6, |b| < 6.

Put x_p == xxxx and chose a value for xxxx.

In[∘]:=
```
xxxx = 1
```

Out[∘]=
```
1
```

We obtain

In[∘]:=
```
ablistofparameters = Reduce[
  (D[f[a, b, c][x], x] == 0 /. x → xxxx) && (f[a, b, c][x] == g[c, d][x] /. x → xxxx) &&
   -6 < a < 6 && -6 < b < 6, {a, b, c, d}, Integers]
```

Out[∘]=
```
(C[1] | C[2]) ∈ ℤ && C[1] ≥ 0 && C[2] ≥ 0 &&
 ((a == -3 && b == 5 && c == -1 + C[1] - C[2] && d == 1 + C[1] - C[2]) ||
   (a == -3 && b == 5 && c == -2 + C[1] - C[2] && d == C[1] - C[2]) ||
   (a == -3 && b == 5 && c == C[1] - C[2] && d == 2 + C[1] - C[2]) ||
   (a == 0 && b == 0 && c == C[1] - C[2] && d == C[1] - C[2]) ||
   (a == 3 && b == -5 && c == 1 + C[1] - C[2] && d == -1 + C[1] - C[2]) ||
   (a == 3 && b == -5 && c == 2 + C[1] - C[2] && d == C[1] - C[2]) ||
   (a == 3 && b == -5 && c == C[1] - C[2] && d == -2 + C[1] - C[2]))
```

The two families of functions that yield satisfactory results for problem 3 are:

In[∘]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := (x^3 + a x^2 + b x + c) Sin[Pi/2 x]
```

In[∘]:=
```
f[a_, b_, c_][x_] := (x^2 + b x + c)/(x^2 ± a^2)
```