Od twierdzenia do rozumienia - poszerzanie horyzontów poznawczych studentów

XIX Ogólnopolska Konferencja Nauczania Matematyki
w Uczelniach Technicznych

Marek Galewski i Jakub Łompieś

Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka

Jak uczymy analizy matematycznej?

- Klasyczna scieżka poznawcza - pojęcie, stosowanie definicji bezpośrednio, lematy, twierdzenia, wnioski - przeplatane zadaniami problemowymi.
- Czy mówiący te słowa uczy w inny sposób?
- Staramy się dawać intuicję, która służy wprowadzaniu kolejnych pojęć.
- Starannie podążamy swoistą *ścieżką efektów kształcenia* od pierwszej definicji do ostatniego egzaminu.
- Co zrobić by było dobrze? Czy da się inaczej? Czego brakuje?

Czy matematyka opowiada dobrą historię?

- Czy matematyka ma szansę opowiadać dobrą historię (choćby pod koniec wykładów)?
- Czy my (nauczyciele) umiemy opowiadać ciekawe historie?
- Jak opowiedzieć dobrą historię? Jak wpleść case-teaching? I czego on (c-t) nas (nauczycieli) może nauczyć?

Opowiem Wam historię o równaniach...

Dawno, dawno temu był sobie Student Kończący Pierwszy Rok Matematyki, który od swojego wykładowcy otrzymał zadanie: **jakie twierdzenia** (poznane w ramach studiów, względnie zakresu nauki w szkole średniej) **prowadzą do istnienia rozwiązań równań**?

Problem (badawczy)

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Które z poznanych twierdzeń (analizy matematycznej) podają warunki wystarczające na istnienie rozwiązania równania

$$f(x) = 0.$$

(Założenia są tak dobre, by operacje były wykonalne; nie zastanawiamy się zawczasu).

Pojęcie równania

Niech X i Y będą pewnymi przestrzeniami oraz niech h i g będą funkcjami, których dziedziny są zawarte w przestrzeni X oraz ich zbiory wartości należą do przestrzeni Y. Niech x będzie dowolnym punktem przestrzeni X. Warunek

$$h(x) = g(x) \tag{1}$$

oznacza, że musimy znaleźć w przestrzeni X takie punkty, w których obie funkcje h i g są określone i przyjmują tą samą wartość. Jest to **równanie o niewiadomej** x **w przestrzeni** X. Każdy punkt z przestrzeni X spełniający warunek (1) nazywamy **rozwiązaniem równania** lub **pierwiastkiem równania**.
Oczywiście równanie (1) jest równoważne równaniu

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

gdzie $f(x) := h(x) - g(x)$, a dziedziną funkcji f jest część wspólna dziedzin funkcji h i g.
Żeby **rozwiązać równanie** trzeba znaleźć wszystkie pierwiastki równania, bądź stwierdzić, że pierwiastków nie ma.

Rozwiązanie równania $f(x) = 0$

1. Sprawdzamy dziedzinę funkcji f,
2. Następnie upewniamy się, czy **istnieją** pierwiastki równania $f(x) = 0$. Przydatnymi narzędziami mogą okazać się:
   - Własność Darboux *(jeżeli f jest ciągła)*,
   - Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego *(jeżeli f jest ciągła)*,
   - Badanie przedziałów monotoniczności funkcji *(jeżeli f jest różniczkowalna)*,
   - Fundamentalne twierdzenie algebry *(tylko dla wielomianów)*,
   - Twierdzenie Bézouta *(tylko dla wielomianów)*,
   - Teoria Sturma *(tylko dla wielomianów)*
3. Gdy już stwierdzimy, że pierwiastki równania $f(x) = 0$ istnieją, to możemy przejść do ich przybliżonego wyznaczenia za pomocą następujących metod:

- **Metoda Bisekcji**
- **Metoda Newtona**

  Założenia:

  - Funkcja $f \in C^2$ na przedziale $[a, b]$
  - Funkcja f ma różne znaki na końcach przedziału, tzn. $f(a)f(b) < 0$
  - Pierwsza i druga pochodna funkcji f mają stały znak na przedziale $[a, b]$
  - $f(x_0)f''(x_0) > 0$

  Wzór iteracyjny:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

- **Metoda iteracji prostej**

  Zakładamy, że $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ oraz $(X,d) = (\mathbb{R}, d_e)$. Równanie

  $$f(x) = 0$$

  przekształcamy do równania równoważnego

  $$x = \varphi(x)$$

  Następnie startujemy z dowolnego punktu $x_0 \in [a,b]$ i tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń x_n wg. wzoru:

  $$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Metoda równań równoważnych

$$A_1 = B_1 \Leftrightarrow A_2 = B_2 \Leftrightarrow A_3 = B_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n = B_n$$

- Metoda analizy starożytnych

$$A_1 = B_1 \Rightarrow A_2 = B_2 \Rightarrow A_3 = B_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n = B_n$$

Przykład

Znaleźć pierwiastki równania:

$$x^5 - 10x - 1 = 0 \tag{4}$$

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy $f(x) := x^5 - 10x - 1$.

- Dziedziną f jest $\mathbb{R}$,
- f jest wielomianem stopnia 5,
- f jest ciągła,
- f jest ma co najmniej jeden pierwiastek i co najwyżej pięć,
- $f \in C^2$,
- Badamy przedziały monotoniczności funkcji f rozwiązując równanie $5x^4 - 10 = 0$ metodą analizy starożytnych,

Przykład

- Po wyznaczeniu przedziałów monotoniczności f, stawiamy hipotezę, że równanie $x^5 - 10x - 1 = 0$ ma 3 rozwiązania,
- Przy pomocy twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego dokonujemy separacji poszczególnych pierwiastków oraz upewniamy się, czy hipoteza była poprawna,
- Przedziały, na których istnieją pierwiastki to: $[-2,-1], [-1,0]$ i $[1,2]$,
- Przechodzimy do przybliżonego wyznaczania pierwiastków: (Z dokładnością $\varepsilon = 0,1$)

Przykład

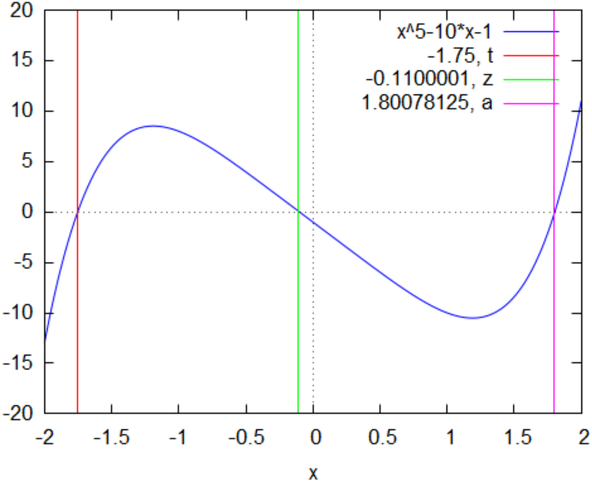
- Na przedziale $[-2, -1]$ zastosujemy **metodę Newtona** - $x_3 = (-1,75)$
- Na $[-1, 0]$ skorzystamy z **metody iteracji prostej** - $x_3 = (-0,1100001)$
- Ostatniego pierwiastka na przedziale $[1, 2]$ będziemy szukać **metodą bisekcji** - $x_8 = 1,80078125$,

Ostatecznie pierwiastkami równania $x^5 - 10x - 1 = 0$ (w przybliżeniu) są:

$$r_1 = (-1,75)$$
$$r_2 = (-0,1100001)$$
$$r_3 = 1,80078125$$

Przykład

Sprawdzenie rozwiązań



Bibliografia

Pełną definicję równania można znaleźć w [4]. Podstawowe metody rozwiązywania równań opisane zostały w [1]. Na temat metod przybliżonego wyznaczania pierwiastków oraz ich poszukiwań można przeczytać w [2] oraz [3].

1. A.Gagatnicki, Matematyka dla kandydatów na wyższe uczelnie, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1965.
2. F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, 1972.
3. T. Trajdos, P. Kucharczyk, K. Bieńkowska-Lipińska, Poradnik Inżyniera. Matematyka, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1986.
4. T. Świątkowski, I. Dziubiński, Poradnik matematyczny. część 1, PWN, 1985.

Istnienie? Dlaczego nie metoda?

- My nawet najprostszych równań nie potrafimy "dokładnie"(czyli w liczbach wymiernych) rozwiązać,

$$\text{ile wynosi x :} \quad \pi x = e$$

- Umiemy odpowiedzieć na pytanie: czy rozwiązanie istnieje, czy jest dokładnie jedno? Nie zastanawiamy się czy zależy w sposób ciągły od parametru (a to kluczowe dla "dokładnych"obliczeń).

Zarys metod - intuicje na przyszłość

- trójmian kwadratowy: jeżeli $a > 0$... - warunki "techniczne", jednoznaczność i wielkrotność;
- własność Darboux (warunki geometryczne, lokalizacja rozwiązań);
- monotoniczność wraz z byciem funkcją "na"(prosta metoda monotoniczna);
- potraktowanie równania w postaci

$$F^{'}(x) = 0, \text{ gdzie } F^{'} = f$$

(intuicja prowadząca do metod wariacyjnych);

Metody i ich rozwinięcie

$$F^{'}(x) = 0$$

- twierdzenie Rolle'a - prosta przełęcz górska (geometria $F(a) = F(b) = 0$, zwartość $[a, b]$, lokalizacja rozwiązań)
- twierdzenie o istnieniu *lokalnego/globalnego* minimum funkcji F na $\mathbb{R}$ - geometria (wypukłość), zwartość (przedział) lub koercytywność (czyli jak x^2)
- istnienie rozwiązań wielokrotnych (np. są dwa minima lokalne ścisłe, to musi być co najmniej trzeci punkt krytyczny)
- punkty przegięcia (przenieść technikę badania wypukłości)

Bibliografia

1. V. M. Alekseev, Č. M. Galeev, V. M. Tikhomirov, Сборник задач по оптимизации. Теория—примеры—задачи., "Nauka Moskwa, 1984. 288 pp.
2. C. Canuto and A. Tabacco, Mathematical Analysis I and II, Springer, (2008).
3. M. Galewski, Basic Monotonicity Methods with Some Applications; Compact Textbooks in Mathematics; Birkhäuser: Basel, Switzerland; SpringerNature: Basingstoke, UK, 2021; ISBN: 978-3-030-75308-5.
4. M. Galewski, Wprowadzenie do metod wariacyjnych. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, (2020), ISBN 978-83-66287-37-2.
5. J. Jahn, Introduction to the theory of nonlinear optimization. 3rd ed. Berlin: Springer, (2007).
6. W. Kryszewski, Analiza matematyczna, Wydawnictwo Naukowe UMK, (2009).
7. M. Spivak, Calculus 3rd edition, Cambridge University Press, (2005).

Dziękujemy za uwagę!